

Digitale Bildverarbeitung

Einheit 8

Lineare Filterung

Lehrauftrag SS 2008

Fachbereich M+I der FH-Offenburg



Dr. Bernard Haasdonk

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

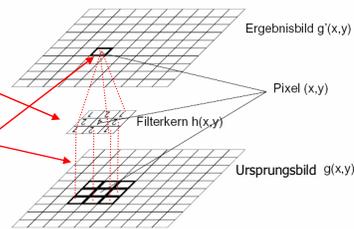
Ziele der Einheit

- Verstehen, wie **lineare Filter** funktionieren und über die sogenannte **Faltung** berechnet werden können
- Verstehen, welche Wirkung verschiedene lineare Filter auf ein Bild haben
 - Mittelwertfilter, Gauss-Filter
 - Sobel-Filter, Prewitt-Filter, etc.
- Die Darstellung von Filtern im **Frequenzraum**
 - **Fouriertransformation** von Bildern
 - Faltung im Fourierraum
- Verstehen, wie lineare Filter verwendet werden können, um
 - Rauschen zu eliminieren, Bilder zu glätten,
 - Kanten zu finden, Bilder zu schärfen, Ecken zu finden, etc.

Lineare Filterung in 2D

- Ein linearer Filter ist gegeben durch seinen „Filterkern“
 - Dies ist eine **kleine Matrix** aus Koeffizienten $h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
 - Filterkerne haben prinzipiell eine beliebige Größe
 - Aus Symmetriegründen werden sie in der Regel mit ungerader Kantenlänge und quadratisch angesetzt.
- Operation eines Linearen Filters in 2D:
 - Man **dreht** den Filterkern $h(x,y)$ um 180 Grad und legt ihn über das Originalbild $g(x,y)$
 - Man **multipliziert** die Werte im Filterkern mit den Pixeln
 - Man **addiert** alle diese Ergebnisse, dies ist der neue Grauwert für das zentrale Pixel
 - Der Filterkern wird verschoben und alle anderen neuen Pixelwerte genauso berechnet
- Diese Operation heißt **Faltung** des Bildes g mit dem Kern h

$$g' = g * h$$



4.3.2008

B. Haasdonk, Digitale Bildverarbeitung, FH Offenburg SS 2008, Einheit 8

5

Tiefpass-Filterung

- Häufige Aufgabe: **Glätten** eines Bildes, also entfernen von **hochfrequenten Störungen**.
- Entsprechende Filter werden Tiefpass-Filter genannt
- Beispiel **Mittelwertfilter** (Box Filter):
 - Der Filterkern besteht aus Einsen mit einem Normierungsfaktor multipliziert

$$h = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad h = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Verrauschtes Bild



5x5 Filterkern



9x9 Filterkern



- Allgemeine Beobachtung bei linearen Tiefpass-Filtern:
 - Rauschen** wird **eliminiert**, aber **Kanten** werden **verwaschen**
 - Je größer der Filterkern ist, desto ausgeprägter ist der Effekt

4.3.2008

B. Haasdonk, Digitale Bildverarbeitung, FH Offenburg SS 2008, Einheit 8

6

Tiefpass-Filterung

- Beispiel **Binomialfilter**:

- Einträge des Filterkerns werden aus Binomialkoeffizienten konstruiert
- Vorteil:
 - einfach und exakt ohne Fließkommazahlen zu berechnen

$$h = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$h = \frac{1}{256} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 6 & 24 & 36 & 24 & 6 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

- Beispiel **Gaußfilter**:

- Einträge des Filterkerns sind aus der Gauß-Funktion konstruiert

Die Gaußverteilung:

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$h(x, y) = G(x) \cdot G(y) \quad \longrightarrow \quad h = \begin{pmatrix} 0.0029 & 0.0131 & 0.0215 & 0.0131 & 0.0029 \\ 0.0131 & 0.0585 & 0.0965 & 0.0585 & 0.0131 \\ 0.0215 & 0.0965 & 0.1592 & 0.0965 & 0.0215 \\ 0.0131 & 0.0585 & 0.0965 & 0.0585 & 0.0131 \\ 0.0029 & 0.0131 & 0.0215 & 0.0131 & 0.0029 \end{pmatrix}$$

- Vorteile:
 - **Isotropie**: Filterung ist nicht richtungsabhängig
 - **Kontinuierliche** Einstellung der **Ausdehnung** über Standardabweichung sigma

4.3.2008

B. Haasdonk, Digitale Bildverarbeitung, FH Offenburg SS 2008, Einheit 8

7

Tiefpass-Filterung

- Filterung bei verschiedenen **Rausch-Arten**

Verrauschtes Bild

3x3 Mittelwertfilter

Additives Gaußsches Rauschen mit Mittelwert 0



Nicht-additives Salt-and-Pepper Rauschen



- **Resultat**:

- Lineare Filterung funktioniert **gut** bei **additivem** Rauschen mit Mittelwert 0
- Lineare Filterung funktioniert **schlecht** bei **nicht-additivem** Rauschen

4.3.2008

B. Haasdonk, Digitale Bildverarbeitung, FH Offenburg SS 2008, Einheit 8

8

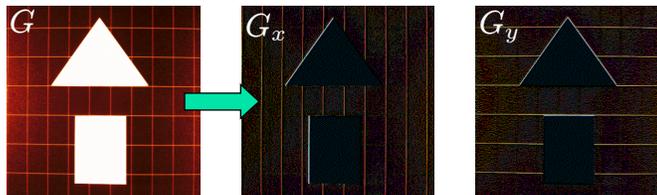
Hochpass-Filterung

- Hochpassfilter **betonen Kanten und Spitzen** in einem Bild
- Entsprechende Filter approximieren die erste Ableitung der Bildfunktion, werden daher **Gradientenfilter** genannt
- Der **Differenzenoperator**:

$$\frac{\partial}{\partial x}g(x,y) \approx g(x,y) - g(x-1,y) \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \text{x-Differenz:} \\ h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{y-Differenz:} \\ h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}g(x,y) \approx g(x+1,y) - g(x,y) \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \text{oder} \\ h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{oder} \\ h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- **Beispiel:**



4.3.2008

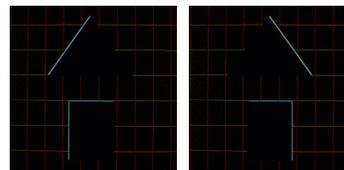
B. Haasdonk, Digitale Bildverarbeitung, FH Offenburg SS 2008, Einheit 8

9

Hochpass-Filterung

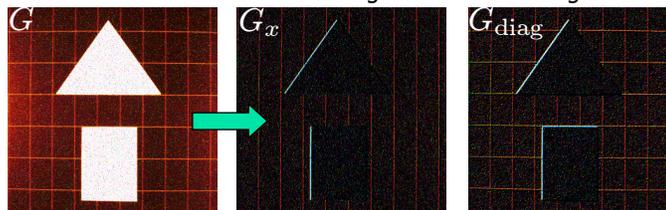
- **Beispiel Roberts-Operator:**
 - Detektiert **diagonale Kanten**

$$h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$



- **Nachteil:** Differenz + Roberts-Operator sind sehr **rauschanfällig**

Verrauschtes Bild Differenzen-gefiltert Roberts-gefiltert



- Man bräuchte Filter, die gleichzeitig mitteln und ableiten!

4.3.2008

B. Haasdonk, Digitale Bildverarbeitung, FH Offenburg SS 2008, Einheit 8

10

Hochpass-Filterung

- Der Prewitt-Operator
 - leitet über 2 Pixel ab und mittelt wie ein Mittelwertfilter
 - Es gibt 8 Variationen durch 45 Grad Drehung, z.B.

$$h = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad h = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Der Sobel-Operator
 - leitet über 2 Pixel ab und mittelt wie ein Binomialfilter über zweimal 3 Pixel
 - Es gibt wiederum 8 Varianten durch Rotieren
- Vorteil: diese Operatoren ergeben „stabilere“ Kanten

$$h = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$h = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



4.3.2008

B. Haasdonk, Digitale Bildverarbeitung, FH Offenburg SS 2008, Einheit 8

11

Hochpass-Filterung

- Sobel oder Prewitt-Filter werden auch **Kompass-Filter** genannt
 - sie extrahieren **selektiv Richtungsanteile** aus Bildern
 - die 8 Richtungen entsprechen den Himmelsrichtungen
- Weitere Beispiele:
 - Der Kompass-Operator
 - Der Kirsch-Operator

$$\begin{aligned} h_{cp1}(u,v) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} & h_{cp2}(u,v) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} & h_{ki1}(u,v) &= \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ -3 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} & h_{ki2}(u,v) &= \begin{pmatrix} -3 & 5 & 5 \\ -3 & 0 & 5 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \\ h_{cp3}(u,v) &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & h_{cp4}(u,v) &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & h_{ki3}(u,v) &= \begin{pmatrix} -3 & -3 & 5 \\ -3 & 0 & 5 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix} & h_{ki4}(u,v) &= \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & 5 \\ -3 & 5 & 5 \end{pmatrix} \\ h_{cp5}(u,v) &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & h_{cp6}(u,v) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & h_{ki5}(u,v) &= \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & -3 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} & h_{ki6}(u,v) &= \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ 5 & 0 & -3 \\ 5 & 5 & -3 \end{pmatrix} \\ h_{cp7}(u,v) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} & h_{cp8}(u,v) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} & h_{ki7}(u,v) &= \begin{pmatrix} 5 & -3 & -3 \\ 5 & 0 & -3 \\ 5 & -3 & -3 \end{pmatrix} & h_{ki8}(u,v) &= \begin{pmatrix} 5 & 5 & -3 \\ 5 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4.3.2008

B. Haasdonk, Digitale Bildverarbeitung, FH Offenburg SS 2008, Einheit 8

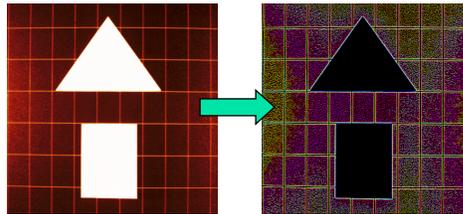
12

Hochpass-Filterung

- Laplace-Filter
 - Beruht auf der zweiten Ableitung der Bildfunktion $g(x,y)$
- Es gibt ihn in mehreren Formen:

Original	um 45 Grad gedreht	als Summe der Grundfilter
$h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$h = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- Beispiel:



- Laplace-Filter findet Punkte mit großer Krümmung
- Physikalische Interpretation durch **Wärmeleitung**:
 - Intensität entspricht zeitlicher Änderung der Temperatur

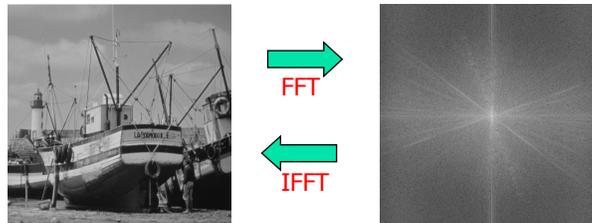
4.3.2008

B. Haasdonk, Digitale Bildverarbeitung, FH Offenburg SS 2008, Einheit 8

13

Fouriertransformation

- Ortsraum:
 - Das Bild wird dargestellt wie es von der Kamera kommt
 - Ein Pixel repräsentiert die Lichtintensität **in einem Ort**
 - Für das visuelle System des Menschen meist optimal
- Rechner "sehen" manchmal "mehr" in einer anderen Darstellung:
- **Fourierraum** (Frequenzraum)
 - Bilder können ohne Informationsverlust in eine Frequenzdarstellung überführt werden, z.B. durch die FFT (Fast Fourier Transformation)
 - Ein Pixel repräsentiert die Intensität einer **bestimmten Frequenz**
 - Werte sind komplexe Zahlen, Betragsquadrat heißt Powerspektrum
 - Die Transformation ist ohne Verlust umkehrbar (inverse FFT)



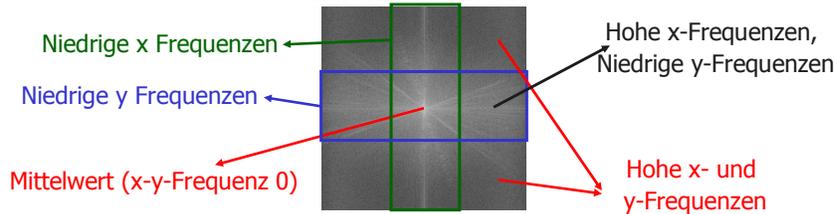
4.3.2008

B. Haasdonk, Digitale Bildverarbeitung, FH Offenburg SS 2008, Einheit 8

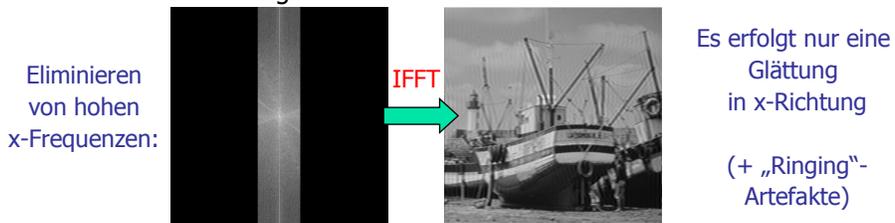
14

Fouriertransformation

- Bedeutung der Regionen im Fourierraum



- Also ist Hochpass und Tiefpass-Filterung im Fourierraum „per Hand“ möglich:



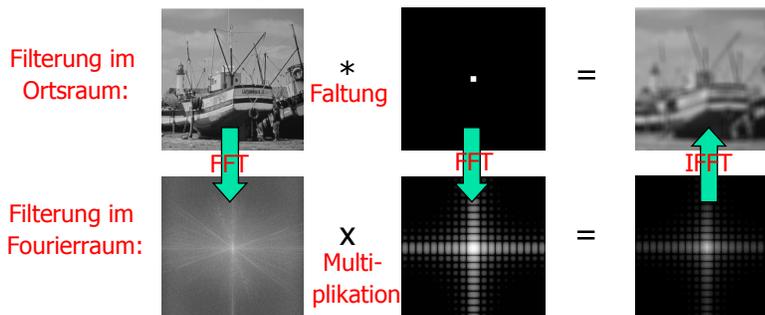
4.3.2008

B. Haasdonk, Digitale Bildverarbeitung, FH Offenburg SS 2008, Einheit 8

15

Filterung im Fourierraum

- Faltungssatz der Fouriertransformation
 - eine Faltung im Ortsraum entspricht einer Multiplikation im Fourierraum.



- Bedeutung:
 - Statt das Bild mit dem Filterkern zu falten, kann man die Fouriertransformierte des Bildes mit der des Filterkerns multiplizieren und eine inverse FFT durchführen
 - Filterentwurf im Orts- oder Frequenzraum ist äquivalent
 - Dies kann schneller sein bei großen Filterkernen

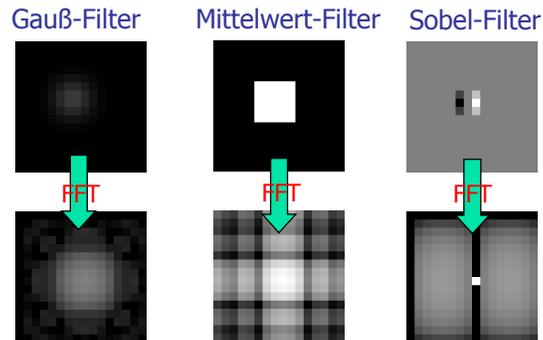
4.3.2008

B. Haasdonk, Digitale Bildverarbeitung, FH Offenburg SS 2008, Einheit 8

16

Filterung im Fourierraum

- Lineare Filter haben ihr Pendant im Frequenzraum



- Die Begriffe Hochpass und Tiefpass sind gerechtfertigt durch Darstellung im Fourierraum
 - Mittelwertfilter eliminiert gemeinsame hohen x- und y-Frequenzen
 - Gaußfilter ist wieder eine Gauß-Funktion im Frequenzraum
 - x-Sobel-Operator eliminiert niedrige x-Frequenzen

4.3.2008

B. Haasdonk, Digitale Bildverarbeitung, FH Offenburg SS 2008, Einheit 8

17

Anwendung: Schärfung von Bildern

- Filterergebnisse sind wichtige **Vorstufen** für weitere Verarbeitungsschritte
- Beispiel der **Bildschärfung**
 - Idee: Kombination des Originalbildes und der Kantendetektion
 - Zunächst wird mit dem Laplace-Operator eine Kantendetektion durchgeführt
 - Das Ergebnis wird eventuell herunterskaliert
 - Das skalierte Kantenbild wird auf das Originalbild addiert



4.3.2008

B. Haasdonk, Digitale Bildverarbeitung, FH Offenburg SS 2008, Einheit 8

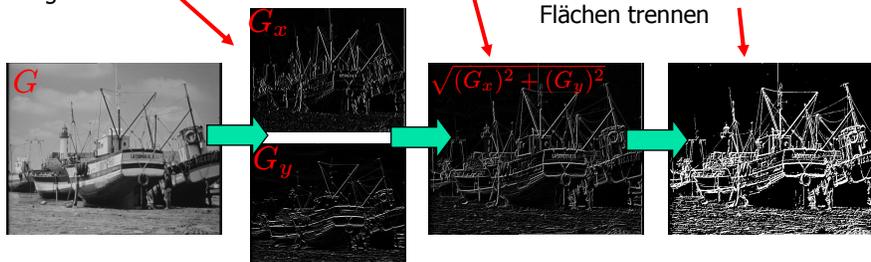
18

Anwendung: Kantenextraktion

■ Beispiel Kantenextraktion

Idee: Kombiniere verschiedene Bilder mit richtungsabhängig detektierten Kanten

- Zuerst wird ein x- und y-Richtungsdetektor angewandt
- Diese werden einzeln quadriert, summiert und die Wurzel genommen (Betrag des Bild-Gradienten)
- Ein Schwellwert kann anschließend die Kantenregionen von homogenen Flächen trennen



4.3.2008

B. Haasdonk, Digitale Bildverarbeitung, FH Offenburg SS 2008, Einheit 8

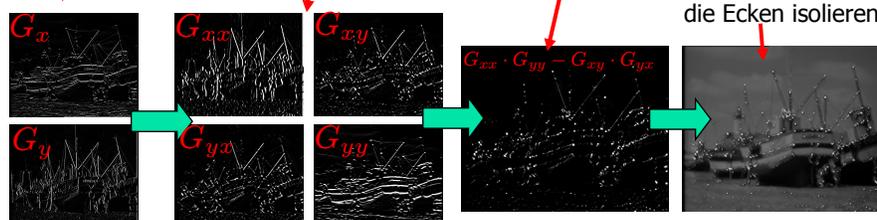
19

Anwendung: Eckenextraktion

■ Beispiel Eckenextraktion

Idee: Ecken sind Punkte mit hoher Grauwertänderung in vielen Richtungen, suche also Punkte mit hohen „Zweiten Ableitungen“

- Zuerst wird ein x- und y-Richtungsdetektor angewandt (erste Ableitung= Gradient)
- Auf diese beiden wird nochmal eine x- und y-Richtungsdetektion angewandt (zweite Ableitung = Hessematrix)
- Eine bestimmte Kombination der Matrizen liefert Maß für die Größe der zweiten Ableitung (Determinante der Hessematrix)
- Ein Schwellwert kann anschließend die Ecken isolieren



4.3.2008

B. Haasdonk, Digitale Bildverarbeitung, FH Offenburg SS 2008, Einheit 8

20

Anwendung: Struktursuche

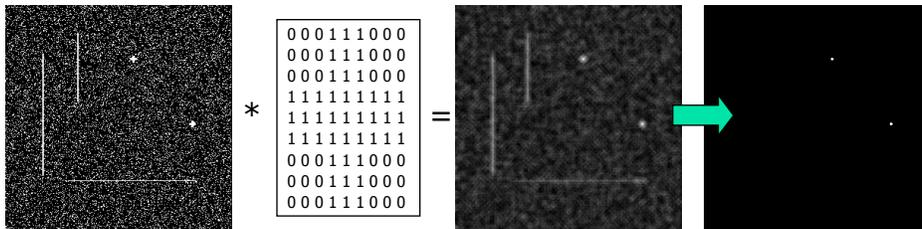
■ Beispiel Template Matching

Idee: Entwickle einen Filter, der die zu suchende Struktur enthält

- An Stellen, wo die Struktur vorhanden ist, „passt“ das Filter und gibt einen hohen Wert
- Anschließende Schwellwertbildung liefert die Position der gefundenen Strukturen

■ Beispiel:

- Suche nach Kreuzen:



4.3.2008

B. Haasdonk, Digitale Bildverarbeitung, FH Offenburg SS 2008, Einheit 8

21

Zusammenfassung

■ Tiefpaßfilter

- bewirken eine **Glättung** des Eingangsbildes, Rauschen wird eliminiert, aber Kanten werden verwaschen.
- sind gut bei additivem Rauschen mit Mittelwert 0, schlecht bei nicht-additivem Rauschen

■ Hochpaßfilter

- detektieren **Kanten** im Eingangsbild.
- können so programmiert werden, dass sie **richtungsempfindlich** sind, d.h. bestimmte Richtungen detektieren.

■ Filterung im **Fourierraum**

- Bilder können ohne Informationsverlust in eine Frequenzdarstellung überführt werden, die sogenannte Fouriertransformation
- Lineare Filter haben ihr Pendant im Frequenzraum: Eine Filterung im Ortsraum entspricht Bild-Multiplikation im Frequenzraum

■ Filterergebnisse sind wichtige **Verarbeitungsvorstufen**

- Liefern wertvolle Information für z.B. Bild-Schärfung, Kantenextraktion, Eckenextraktion, Mustersuche, etc.

4.3.2008

B. Haasdonk, Digitale Bildverarbeitung, FH Offenburg SS 2008, Einheit 8

22