Digitale Bildverarbeitung
Einheit 8
Lineare Filterung

Lehrauftrag WS 05/06
Fachbereich M+I der FH-Offenburg

Dipl.-Math. Bernard Haasdonk
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

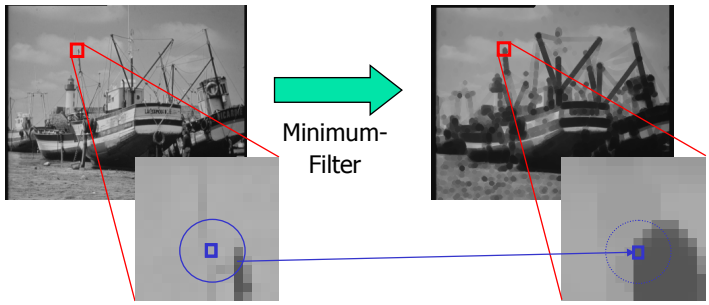
Ziele der Einheit

- Verstehen, wie lineare Filter funktionieren und über die sogenannte Faltung berechnet werden können
- Verstehen, welche Wirkung verschiedene lineare Filter auf ein Bild haben
  - Mittelwertfilter, Gauss-Filter
  - Sobel-Filter, Prewitt-Filter, etc.
- Die Darstellung von Filtern im Frequenzraum
  - Fouriertransformation von Bildern
  - Faltung im Fourierraum
- Verstehen, wie lineare Filter verwendet werden können, um
  - Rauschen zu eliminieren, Bilder zu glätten,
  - Kanten zu finden, Bilder zu schärfen, Ecken zu finden, etc.

Allgemeine Filterung

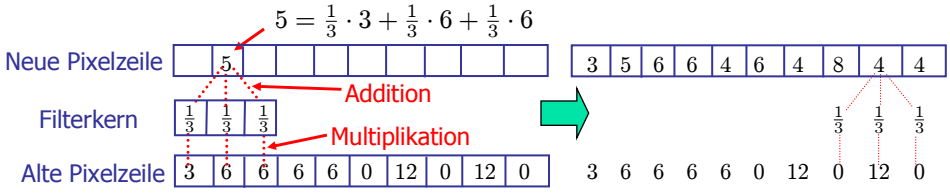
- Ziel einer Filterung ist i.a. eine Bildverbesserung
  - Reduktion störender Anteile / Hervorhebung informativer Anteile
- Filteroperationen modifizieren einzelne Bilder
- Filteroperationen beziehen zur Berechnung eines Grauwertes im Ergebnisbild eine ganze Umgebung des ursprünglichen Bildpunktes mit ein
- Man unterscheidet lineare und nichtlineare Filter
- Beispiel eines nichtlinearen „Minimum-Filters"

Ersetze ein Pixel Durch das dunkelste Nachbar-Pixel in einem Umkreis



Lineare Filterung in 1D

- Beispiel der linearen Filterung einer Pixelzeile:



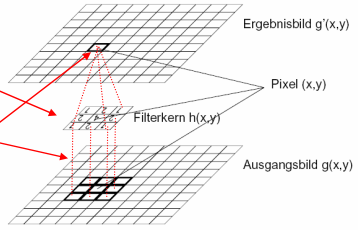
  - Man multipliziert die Werte im Filterkern mit den Pixeln
  - Man addiert alle diese Ergebnisse, dies ist der neue Wert für das zentrale Pixel
  - Der Filterkern wird verschoben und alle anderen neuen Pixelwerte genauso berechnet
- Im Beispiel ist eine Glättung erfolgt:
  - ist ein sogenanntes Mittelwertfilter
  - Die Unterschiede in aufeinanderfolgenden Pixeln sind gesunken
- Was tut man bei Pixel am Rand?
  - Oft wird angenommen, dass das Originalbild mit fortgesetzt ist

Lineare Filterung in 2D

- Ein lineares Filter ist gegeben durch seinen „Filterkern"
  - Dies ist eine kleine Matrix aus Koeffizienten
  - Filterkerne haben prinzipiell eine beliebige Größe
  - Aus Symmetriegründen werden sie in der Regel mit ungerader Kantenlänge und quadratisch angesetzt.

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Operation eines Linearen Filters in 2D:
  - Man dreht den Filterkern h(x,y) um 180 Grad und legt ihn über das Originalbild g(x,y)
  - Man multipliziert die Werte im Filterkern mit den Pixeln
  - Man addiert alle diese Ergebnisse, dies ist der neue Grauwert für das zentrale Pixel
  - Der Filterkern wird verschoben und alle anderen neuen Pixelwerte genauso berechnet



- Diese Operation heißt Faltung des Bildes g mit dem Kern h

$$g' = g * h$$

Tiefpass-Filterung

- Häufige Aufgabe: Glätten eines Bildes, also entfernen von hochfrequenten Störungen.
- Entsprechende Filter werden Tiefpass-Filter genannt
- Beispiel Mittelwertfilter (Box Filter):
  - Der Filterkern besteht aus Einsen mit einem Normierungsfaktor multipliziert

$$h = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad h = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Verrauschtes Bild | 5x5 Filterkern | 9x9 Filterkern

- Allgemeine Beobachtung bei linearen Tiefpass-Filtern:
  - Rauschen wird eliminiert, aber Kanten werden verwaschen
  - Je größer der Filterkern ist, desto ausgeprägter ist der Effekt

Tiefpass-Filterung

- Beispiel Binomialfilter:
  - Einträge des Filterkerns werden aus Binomialkoeffizienten konstruiert
  - Vorteil:
    - einfach und exakt ohne Fließkommazahlen zu berechnen

$$h = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$h = \frac{1}{256}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 6 & 24 & 36 & 24 & 6 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

- Beispiel Gaußfilter:
  - Einträge des Filterkerns sind aus der Gauß-Funktion konstruiert

Die Gaußverteilung:

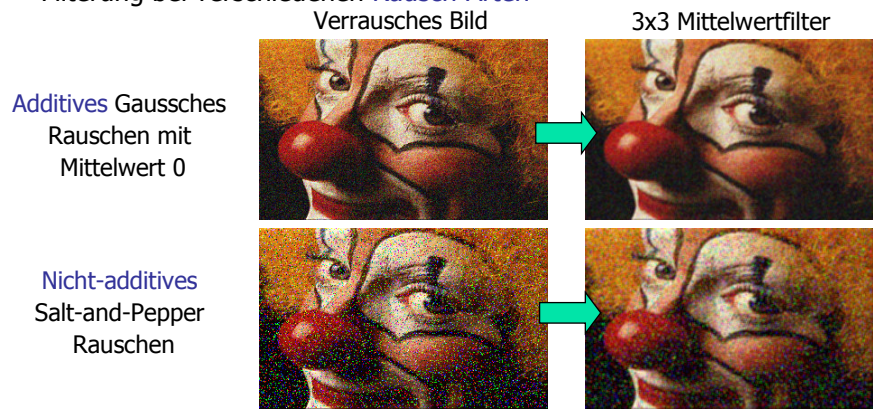
$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$h(x,y) = G(x)\cdot G(y) \Rightarrow h = \begin{pmatrix} 0.0029 & 0.0131 & 0.0215 & 0.0131 & 0.0029 \\ 0.0131 & 0.0585 & 0.0965 & 0.0585 & 0.0131 \\ 0.0215 & 0.0965 & 0.1592 & 0.0965 & 0.0215 \\ 0.0131 & 0.0585 & 0.0965 & 0.0585 & 0.0131 \\ 0.0029 & 0.0131 & 0.0215 & 0.0131 & 0.0029 \end{pmatrix}$$

  - Vorteile:
    - Isotropie: Filterung ist nicht richtungsabhängig
    - Kontinuierliche Einstellung der Ausdehnung über Standardabweichung sigma

Tiefpass-Filterung

- Filterung bei verschiedenen Rausch-Arten



- Resultat:
  - Lineare Filterung funktioniert gut bei additivem Rauschen mit Mittelwert 0
  - Lineare Filterung funktioniert schlecht bei nicht-additivem Rauschen

Hochpass-Filterung

- Hochpassfilter betonen Kanten und Spitzen in einem Bild
- Entsprechende Filter approximieren die erste Ableitung der Bildfunktion, werden daher Gradientenfilter genannt
- Der Differenzenoperator:

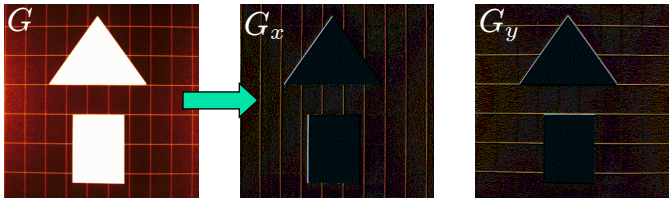
x-Differenz: y-Differenz:

$$\frac{\partial}{\partial x} g(x,y) \approx g(x,y) - g(x-1,y) \Rightarrow h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

oder oder

$$\frac{\partial}{\partial x} g(x,y) \approx g(x+1,y) - g(x,y) \Rightarrow h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

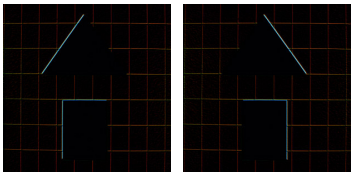
- Beispiel:



Hochpass-Filterung

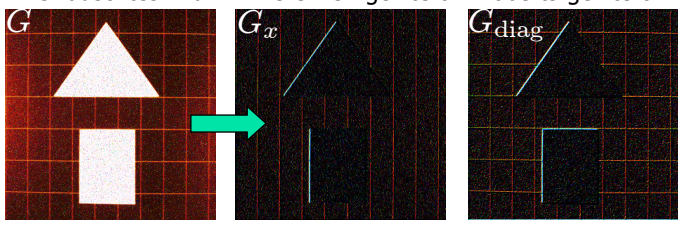
- Beispiel Roberts-Operator:
  - Detektiert diagonale Kanten

$$h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$



- Nachteil: Differenz + Roberts-Operator sind sehr rauschanfällig

Verrauschtes Bild Differenzen-gefiltert Roberts-gefiltert



- Man bräuchte Filter, die gleichzeitig mitteln und ableiten!

Hochpass-Filterung

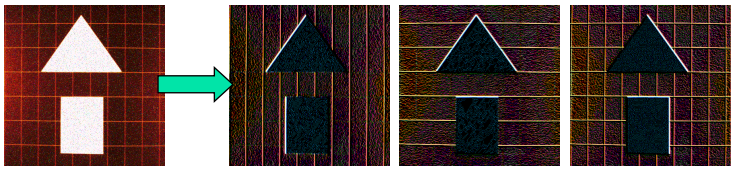
- Der Prewitt-Operator
  - leitet über 2 Pixel ab und mittelt wie ein Mittelwertfilter
  - Es gibt 8 Variationen durch 45 Grad Drehung, z.B.

$$h = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad h = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Der Sobel-Operator
  - leitet über 2 Pixel ab und mittelt wie ein Binomialfilter über zweimal 3 Pixel
  - Es gibt wiederum 8 Varianten durch Rotieren

$$h = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad h = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Vorteil: diese Operatoren ergeben „stabilere" Kanten



Hochpass-Filterung

- Sobel oder Prewitt-Filter werden auch Kompass-Filter genannt
  - sie extrahieren selektiv Richtungsanteile aus Bildern
  - die 8 Richtungen entsprechen den Himmelsrichtungen
- Weitere Beispiele:
  - Der Kompass-Operator Der Kirsch–Operator

$$h_{co_1}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad h_{co_2}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$h_{co_3}(u,v) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad h_{co_4}(u,v) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$h_{co_5}(u,v) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad h_{co_6}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$h_{co_7}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad h_{co_8}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$h_{ki_1}(u,v) = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ -3 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \quad h_{ki_2}(u,v) = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 5 \\ -3 & 0 & 5 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$h_{ki_3}(u,v) = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 5 \\ -3 & 0 & 5 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix} \quad h_{ki_4}(u,v) = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & 5 \\ -3 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$h_{ki_5}(u,v) = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & -3 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \quad h_{ki_6}(u,v) = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ 5 & 0 & -3 \\ 5 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$h_{ki_7}(u,v) = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -3 \\ 5 & 0 & -3 \\ 5 & -3 & -3 \end{pmatrix} \quad h_{ki_8}(u,v) = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -3 \\ 5 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Hochpass-Filterung

- Laplace-Filter
  - Beruht auf der zweiten Ableitung der Bildfunktion g(x,y)
- Es gibt ihn in mehreren Formen:

Original

$$h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

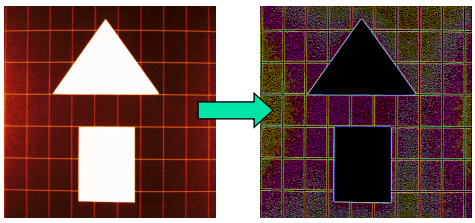
um 45 Grad gedreht

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

als Summe der Grundfilter

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

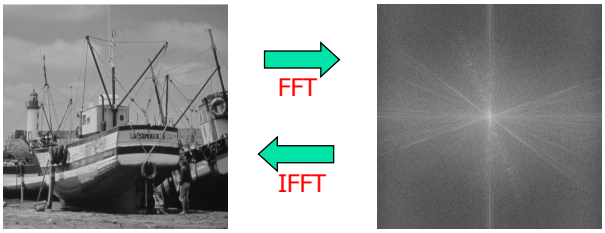
- Beispiel:



  - Laplace-Filter findet Punkte mit großer Krümmung
- Physikalische Interpretation durch Wärmeleitung:
  - Intensität entspricht zeitlicher Änderung der Temperatur

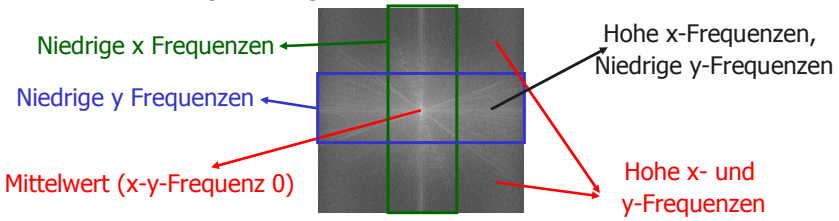
Fouriertransformation

- Ortsraum:
  - Das Bild wird dargestellt wie es von der Kamera kommt
  - Ein Pixel repräsentiert die Lichtintensität in einem Ort
  - Für das visuelle System des Menschen meist optimal
- Rechner "sehen" manchmal "mehr" in einer anderen Darstellung:
- Fourierraum (Frequenzraum)
  - Bilder können ohne Informationsverlust in eine Frequenzdarstellung überführt werden, z.B. durch die FFT (Fast Fourier Transformation)
  - Ein Pixel repräsentiert die Intensität einer bestimmten Frequenz
  - Werte sind komplexe Zahlen, Betragsquadrat heißt Powerspektrum
  - Die Transformation ist ohne Verlust umkehrbar (inverse FFT)



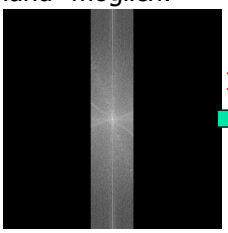
Fouriertransformation

- Bedeutung der Regionen im Fourierraum



- Also ist Hochpass und Tiefpass-Filterung im Fourierraum „per Hand" möglich:

Eliminieren von hohen x-Frequenzen:



IFFT

Es erfolgt nur eine Glättung in x-Richtung

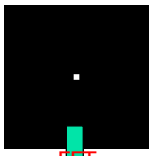
(+ „Ringing"-Artefakte)

Filterung im Fourierraum

- Faltungssatz der Fouriertransformation
  - eine Faltung im Ortsraum entspricht einer Multiplikation im Fourierraum.

Filterung im Ortsraum:

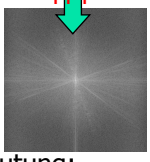
* Faltung



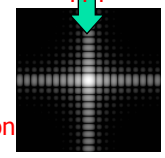
=

FFT FFT IFFT

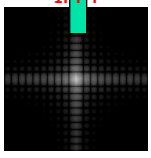
Filterung im Fourierraum:



x Multi-plikation



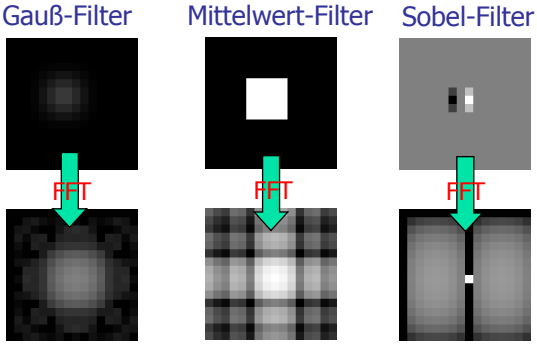
=



- Bedeutung:
  - Statt das Bild mit dem Filterkern zu falten, kann man die Fourier-transformierte des Bildes mit der des Filterkerns multiplizieren und eine inverse FFT durchführen
  - Filterentwurf im Orts- oder Frequenzraum ist äquivalent
  - Dies kann schneller sein bei großen Filterkernen

Filterung im Fourierraum

- Lineare Filter haben ihr Pendant im Frequenzraum



- Die Begriffe Hochpass und Tiefpass sind gerechtfertigt durch Darstellung im Fourierraum
  - Mittelwertfilter eliminiert gemeinsame hohen x- und y-Frequenzen
  - Gaußfilter ist wieder eine Gauß-Funktion im Frequenzraum
  - x-Sobel-Operator eliminiert niedrige x-Frequenzen

Anwendung: Schärfung von Bildern

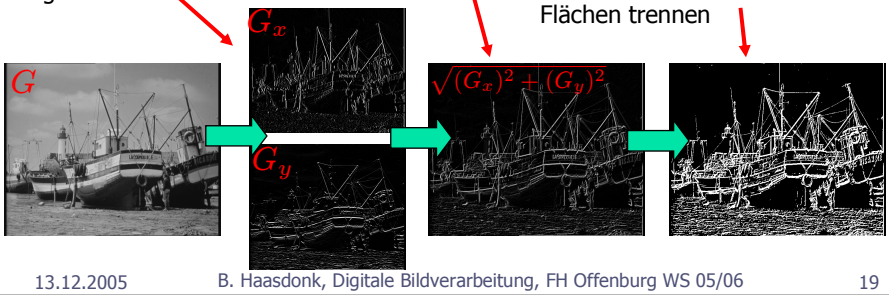
- Filterergebnisse sind wichtige Vorstufen für weitere Verarbeitungsschritte
- Beispiel der Bildschärfung

  Idee: Kombination des Originalbildes und der Kantendetektion
  - Zunächst wird mit dem Laplace-Operator eine Kantendetektion durchgeführt
  - Das Ergebnis wird eventuell herunterskaliert
  - Das skalierte Kantenbild wird auf das Originalbild addiert

Anwendung: Kantenextraktion

- Beispiel Kantenextraktion
  Idee: Kombiniere verschiedene Bilder mit richtungsabhängig detektierten Kanten

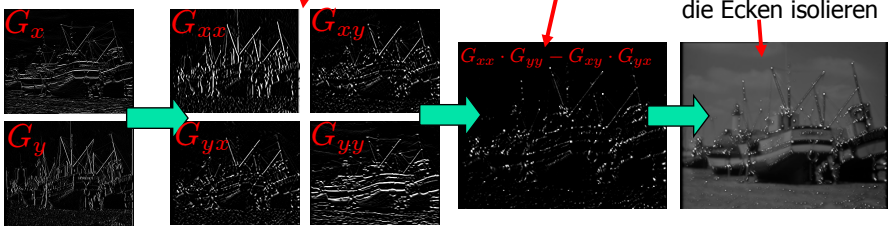
- Zuerst wird ein x- und y-Richtungsdetektor angewandt
- Diese werden einzeln quadriert, summiert und die Wurzel genommen (Betrag des Bild-Gradienten)
- Ein Schwellwert kann anschließend die Kantenregionen von homogenen Flächen trennen



Anwendung: Eckenextraktion

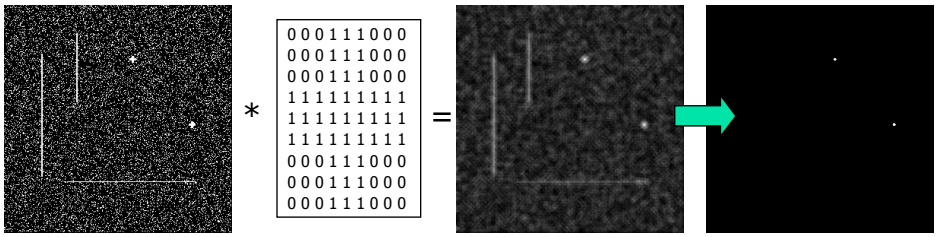
- Beispiel Eckenextraktion
  Idee: Ecken sind Punkte mit hoher Grauwertänderung in vielen Richtungen, suche also Punkte mit hohen „Zweiten Ableitungen"

- Zuerst wird ein x- und y-Richtungsdetektor angewandt (erste Ableitung= Gradient)
- Auf diese beiden wird nochmal eine x- und y-Richtungsdetektion angewandt (zweite Ableitung = Hessematrix)
- Eine bestimmte Kombination der Matrizen liefert Maß für die Größe der zweiten Ableitung (Determinante der Hessematrix)
- Ein Schwellwert kann anschließend die Ecken isolieren



Anwendung: Struktursuche

- Beispiel Template Matching
  Idee: Entwickle einen Filter, der die zu suchende Struktur enthält
  - An Stellen, wo die Struktur vorhanden ist, „passt" das Filter und gibt einen hohen Wert
  - Anschließende Schwellwertbildung liefert die Position der gefundenen Strukturen
- Beispiel:
  - Suche nach Kreuzen:



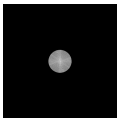
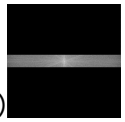
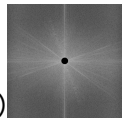
Zusammenfassung

- Tiefpaßfilter
  - bewirken eine Glättung des Eingangsbildes, Rauschen wird eliminiert, aber Kanten werden verwaschen.
  - sind gut bei additivem Rauschen mit Mittelwert 0, schlecht bei nicht-additivem Rauschen
- Hochpaßfilter
  - detektieren Kanten im Eingangsbild.
  - können so programmiert werden, dass sie richtungsempfindlich sind, d.h. bestimmte Richtungen detektieren.
- Filterung im Fourierraum
  - Bilder können ohne Informationsverlust in eine Frequenzdarstellung überführt werden, die sogenannte Fouriertransformation
  - Lineare Filter haben ihr Pendant im Frequenzraum: Eine Filterung im Ortsraum entspricht Bild-Multiplikation im Frequenzraum
- Filterergebnisse sind wichtige Verarbeitungsvorstufen
  - Liefern wertvolle Information für z.B. Bild-Schärfung, Kantenextraktion, Eckenextraktion, Mustersuche, etc.

Aufgaben

- 1. Filterung und Punktoperation
  - a) Finden Sie eine Bildoperation, die sowohl als Punktoperation, als auch als lineare Filterung aufgefasst werden kann.
  - b) Geben Sie die entsprechende Intensitäts-Skalierungskennlinie und den Filterkern an.
- 2. Filterung im Fourierraum:

  Im Fourierspektrum eines Bildes werden bestimmte Teile eliminiert, wie in nebenstehenden Bildern a)-c) angedeutet. Wenn man die inverse Fouriertransformation durchführt erhält man wieder ein Bild. Welche qualitativen Änderungen sind in den Rücktransformierten Bildern sichtbar im Vergleich zum Ursprungsbild?

  a)  b)  c) 
- 3. Isotropie/Anisotropie

  Laden Sie das Bild kreis.tif von der Webseite in ImageJ
  - a) Filtern Sie es mit einem 61x61 Mittelwertfilter (Mean)
  - b) Filtern Sie es mit einem Gauss-Filter derselben Filtergröße (Gaussian Blur)
  - c) Erläutern Sie an den Ergebnissen die Begriffe „Isotropie/Anisotropie"
- 4. Linearität der Filterung
  - Nehmen Sie zwei beliebige gleich große Grauwertbilder A und B mit Grauwerten unter 128 und einen beliebigen linearen Filter.
  - a) Konstruieren und vergleichen Sie die beiden folgenden
    - Die gefilterte Version von A mit 2 multipliziert
    - A mit 2 multipliziert und anschließend gefiltert.
  - b) Konstruieren und vergleichen sie die beiden folgenden
    - Die gefilterten Bilder A und B addiert
    - Die Bilder A und B addiert und das Ergebnis gefiltert
  - c) Interpretieren Sie das Ergebnis in Bezug auf den Begriff „Lineare Filterung"