Affininvariante Fourierdeskriptoren ebener Kurven

Vom Promotionsausschuß der
Technischen Universität Hamburg - Harburg
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor - Ingenieur
genehmigte Dissertation

von
Klaus Arbter
aus
Gleiwitz

1990

1. Gutachter: Prof. Dr.-Ing. H. Burkhardt

2. Gutachter: Prof. Dr.-Ing. F. Wahl

3. Gutachter: Prof. Dr.-Ing. E. Kreuzer

Tag der mündlichen Prüfung: 2. März 1990

Vorwort

Diese Arbeit wurde am Institut für Dynamik der Flugsysteme der Deutschen Forschungsanstalt für Luft- und Raumfahrt (DLR) in Oberpfaffenhofen durchgeführt.

Herr Prof. Dr.-Ing. H. Burkhardt von der Technischen Universität Hamburg-Harburg hat diese Arbeit von Beginn an mit goßem Interesse verfolgt und auf vielfältige Weise unterstützt. Seine Diskussionsbeiträge und Anregungen waren mir eine wertvolle Hilfe. Ihm gilt mein besonderer Dank.

Herrn Prof. Dr.-Ing. F. Wahl von der Technischen Universität Braunschweig und Herrn Prof. Dr.-Ing. Kreuzer von der Technischen Universität Hamburg-Harburg danke ich für ihr Interesse an dieser Arbeit und für die Übernahme der Korreferate.

Mein Dank gilt dem Institutsdirektor, Herrn Prof. Dr.-Ing. J. Ackermann, und dem Leiter der Abteilung Automatisierung, Herr Dr. G. Hirzinger. Sie haben die Durchführung der Arbeit ermöglicht und großzügig gefördert.

Meine Frau Renate hat durch Geduld und Verständnis zum Gelingen der Arbeit wesentlich beigetragen. Herzlichen Dank.

Oberpfaffenhofen, im März 1990 Klaus Arbter

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **11**

1.1 Invariante Merkmale zur Mustererkennung 13

1.2 Gegenstand der Arbeit 15

1.3 Inhaltsübersicht 15

2 Grundlagen **17**

2.1 Die affine Abbildung in der Ebene 17

2.1.1 Affine Abbildung in der reellen Ebene $\mathbf{R}^2$ 18

2.1.2 Affine Abbildung in der komplexen Ebene $\mathbf{C}$ 18

2.1.3 Beziehungen zwischen den Abbildungsparametern 19

2.2 Zum Begriff der Invariante einer Punktmenge 19

3 Konturbeschreibungen **22**

3.1 Kontinuierliche Parameterdarstellung 22

3.2 Diskrete Parameterdarstellung durch Fourierdeskriptoren 31

3.3 Ergänzungen für offene Kurven 35

3.4 Fourierdeskriptoren affiner Konturen - Die Gruppe G_{AZ} 39

4 Invariantensysteme unter der Gruppe G_A **41**

4.1 Minimale vollständige A-Invariantensysteme 42

4.2 Nicht vollständige A-Invariantensysteme 43

4.3 Absolute A-Invarianten 44

4.4 Invariantensysteme unter Untergruppen der affinen Gruppe 46

5 Invariantensysteme unter der Gruppe G_Z **47**

6 Affininvariante Fourierdeskriptoren **53**

7 Bestimmung von Bewegungsparametern **62**

7.1 Parameter der affinen Abbildung in der Musterebene 62

7.2 Bestimmung von 6-Freiheitsgrade-Bewegungsparametern ebener Objekte im $\mathbf{R}^3$ aus Kamera-Aufnahmen 69

8 Fourierdeskriptoren von Polygonen **79**

8.1 Parametrisierung 80

8.2 Fouriertransformation 81

9 Bezüge zu anderen Arbeiten **85**

9.1 Ähnlichkeitsinvariante Fourierdeskriptoren 85

9.2 Affininvariante Fourierdeskriptoren 90

9.3 Momente 90

9.4 Ergänzungen 93

10 Zusammenfassung **94**

Anhang

A Fourierkoeffizienten affiner Kurven **97**

B Zulässige Parameter und ihre Differentiale **97**

C Flächenparameter **101**

D Lineare diophantische Gleichungen **103**

D.1 Der Euklidische Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers ganzer Zahlen 104

D.2 Die lineare diophantische Gleichung mit zwei Unbekannten 104

D.3 Die lineare diophantische Gleichung mit n Unbekannten 106

E FORTRAN-Programme **107**

Schrifttum

Bildverzeichnis

1 Affine und nicht affine Kurven 17

2 Kompaktheit unter Parallelprojektion 21

3 Parametrisierte Kurven 23

4 Flächendifferentiale unter einer affinen Transformation 26

5 Komponenten einer Kurve 28

6 Komponenten einer Kurve unter Störung 29

7 Kurvenparameterfehler unter Konturstörung 31

8 Leistungsspektren einer Kurve 33

9 Fourierapproximationen bei verschiedenen Kurvenparametern 34

10 Fourierapproximation eines unstetig beschriebenen Quadrats 35

11 Darstellungen offener Kurven 36

12 Fourierapproximation einer offenen Kurve 38

13 A-invariante Muster 45

14 AZ-invariante Muster 56

15 Konturvergleich im Merkmalsraum 57

16 Konturvergleich im Musterraum 58

17 AZ-Invariantenfehler unter zufälliger Konturstörung 59

18 AZ-Invariantenfehler bei unterschiedlichem Kurvenparameter 60

19 AZ-Invariantenfehler bei fehlerfreier Parametrisierung 61

20 Ortskurven der Abbildungsparameter a und b 64

21 Beispiel für 50% gleichverteilte Konturstörung 65

22 Abbildungsparameter unter Konturstörungen 66

23 Abbildungsparameter unter Konturstörungen 67

24 Zentralprojektion 69

25 Winkelfehler 76

26 Beispiel für Konturstörung 20% gleichverteilt 76

27 Fehler der rückgerechneten Kamera-Lageparameter 77

28 Fehler der rückgerechneten Kamera-Lageparameter 78

29 Orientiertes N-Eck 80

Tabellenverzeichnis

1 Determinanten bei Parametrisierung durch die absolute Fläche 68

2 Determinanten bei Parametrisierung durch die Fläche 68

Symbolverzeichnis

A	Transformationsmatrix
a	Parameter der affinen Transformation
a_{ik}	Elemente der Transformatinsmatrix A
b	Parameter der affinen Transformation
$\mathcal{C}$	Kurve
$\mathbf{C}$	Komplexe Ebene
C_k, C_k^0	Fourierdeskriptoren
c	Parameter der affinen Transformation
D	Determinante
$D_k, D_{k,p}$	A-Invarianten
E	Einheitsmatrix
F	Fläche
f	Brennweite
$\mathcal{F}$	Fouriertransformierte
g, ggT	größter gemeinsamer Teiler
I, I^0	Invariantensysteme
$I_k, I_{k,q}$	Invarianten
$\Im$	Imaginärteil
j	imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$
L, l	Umfang, Bogenlänge
$\mathbf{M}, \mathbf{M}^0$	Punktmengen in der Ebene
M	Intervallgrenze im Spektralraum
m_{pq}	Momente
P, P^0	Potenzprodukte
Q, Q^0	absolute, vollständige A-Invarianten
R, R^0	absolute, nicht vollständige A-Invarianten
$R_1, ..., R_6$	Rotationsinvarianten nach Hu
$\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^n$	reelle Räume der Dimensionen 2 und n
$\Re$	Realteil
s	Grad der Rotationssymmetrie
t, t^0, t_a	Kurvenparameter, Affinlänge
U_k	Fourierkoeffizient von $u(t)$
u, u^0	erste Komponente bzw. Realteil von x, x^0
u_0	erste Komponente der Translation
$u_\xi, u_{\xi\xi}$	erste und zweite Ableitung von u nach ξ
$\bar{u}^0, \tilde{u}^0$	erste Komponente eines Bezugspunktes

	und eines Randpunktes auf einem ebenen Objekt
v, v^0	zweite Komponente bzw. Realteil von x, x^0
v_0	zweite Komponente der Translation
$v_\xi, v_{\xi\xi}$	erste und zweite Ableitung von v nach ξ
V_k	Fourierkoeffizient von $v(t)$
$\bar{v}^0, \tilde{v}^0$	zweite Komponente eines Bezugspunktes
	und eines Randpunktes auf einem ebenen Objekt
w^0	dritte Komponente in objektfesten Koordinaten
x	erste Komponente in kamerafesten Koordinaten
x, x^0	Punkte im $\mathbf{R}^2$ oder in $\mathbf{C}$
x_0	Translation im $\mathbf{R}^2$
$\hat{x}^0$	rückgerechnete Translation im $\mathbf{R}^3$, erste Komponente
$x_\xi, x_{\xi\xi}$	erste und zweite Ableitung von x nach ξ
X_k, X_k^0	Fourierdeskriptoren der Funktionen $x(t), x^0(t)$
y	zweite Komponente in kamerafesten Koordinaten
$\hat{y}^0$	rückgerechnete Translation im $\mathbf{R}^3$, zweite Komponente
z	komplexe Exponentialfunktion mit konstantem Argument
z	dritte Komponente der kamerafesten Koordinaten
$\hat{z}^0$	rückgerechnete Translation im $\mathbf{R}^3$, dritte Komponente
$\mathbf{Z}, \mathbf{Z}\backslash\mathbf{0}$	Menge der ganzen Zahlen, dto. ausschließlich der Null
$\alpha, \hat{\alpha}$	Azimut, rückgerechnet
ϵ	Fehler
Δ, Δ^0	Determinanten
$\Delta_k, \Delta_{k,p}$	A-Invarianten
δ	Diracscher Operator
κ	Krümmung
$\lambda, \lambda_i, \lambda_0$	ganzzahlige Exponenten
μ	Streckungsfaktor in der Ebene, und Kamera-Abbildungsmaßstab
μ_{pq}	Zentralmomente
$\bar{\mu}$	Mittl. Kamera-Abbildungsmaßstab
ξ	Kurvenparameter allg.
τ	Parameterverschiebung
$\Phi, \hat{\Phi}$	Drehwinkel, rückgerechnet
Φ_k	komplexe Exponentialfunktion der Phase φ_k
$\Psi, \hat{\Psi}$	Neigungswinkel, rückgerechnet
Ψ_k	komplexe Exponentialfunktion der Phase ψ_k

1 Einleitung

Der Gesichtssinn befähigt den Menschen, Objekte berührungslos zu erkennen und zielsicher zu ergreifen - weitgehend unabhängig von deren räumlicher Position und Orientierung. Ein zentrales Problem der Prozeßautomatisierung ist es, diese Fähigkeiten unter Verwendung von Bildsystemen, bestehend aus Kameras zur Bildaufnahme und Rechenmaschinen zur Bildauswertung, technisch nachzubilden. Bedarf an solchen Leistungen besteht zum Beispiel in der Fertigungsautomatisierung, wo man teure Ausricht- und Sortiereinrichtungen sparen will. Dem Bildsystem kommt dabei die Aufgabe zu, das Kamerabild eines Objektes einer Bedeutungsklasse zuzuweisen (Objektidentifizierung) und aus dem Vorwissen über die Objektgestalt und deren aktuellem Kamerabild Lageparameter zu extrahieren (Parameteridentifizierung). Wegen der hohen Datenmengen von Bildern und der prozeßbedingten Zeitbeschränkungen für deren Verarbeitung und nicht zuletzt aus Mangel an geeigneten Algorithmen ist es bisher nicht gelungen, diese Aufgabe vollständig zu lösen. Andererseits sind für technische Problemstellungen Teillösungen, die auf einschränkenden Voraussetzungen beruhen, oft ausreichend.

Dabei werden die Voraussetzungen teils implizit und teils explizit formuliert. Ist etwa von Binärbildverarbeitung die Rede, dann wird implizit unterstellt, daß Grauwert- oder Farbinformation zur Lösung des Problems irrelvant sei, und Probleme wie Verdeckungen und Schlagschatten entweder nicht vorkommen oder anderweitig beherrscht werden. Die explixite Formulierung erfolgt häufig durch Angabe eines Modells, in dem ausgedrückt wird welche Varianten eines *Referenzmusters* (Prototyp) unter den Variationen der *Freiheitsgrade* (Modellparameter) als *äquivalent* zu betrachten sind. Ein einfaches Beispiel soll dies veranschaulichen. Das Modell $G(u,v) = G^0(u-u_0, v-v_0)$ mit den Freiheitsgraden u_0 und v_0 beschreibt die Gesamtheit der Grauwertmuster, die durch Verschiebungen des Referenzmusters $G^0(u,v)$ in der u,v-Ebene möglich sind. Bezüglich der Freiheitsgrade der Translation in der Musterebene sind daher nur solche Musterpaare äquivalent für die ein Paar u_0, v_0 existiert mit dem diese Gleichung erfüllt wird.

Betrachtet man jedoch *ähnliche* Muster als äquivalent, dann ist das Modell um die Freiheitsgrade der Rotation und der zentrischen Streckung zu erweitern. Läßt man schließlich noch die Freiheitsgrade der *Scherung* zu, dann bildet die Gesamtheit der Muster, die sich durch *affine* Koordinatentransformationen (Kap. 2) aufeinander abbilden lassen eine *Äquivalenzklasse.* Die praktische Bedeutung dieses Modells liegt dort, wo ebene Objekte aus schräger aber unbekannter Ansicht aufgenommen werden. Setzt man nämlich orthographische Projektion in die Bildebene voraus, dann sind alle Bilder eines ebenen Objekts zueinander affin. Ist beispielsweise die Vorlage ein Kreis, dann ist dessen Bild im allgemeinen eine Ellipse und nur im Sonderfall ein Kreis. Andererseits ist es bei unbekannter

Betrachterposition nicht möglich an der Gestalt der Bildfigur zu erkennen, ob die Vorlage ein Kreis oder eine Ellipse ist. Hier ist es also angebracht die Menge aller Ellipsen zu einer Klasse zusammenzufassen und nicht zwischen Kreisen und Ellipsen zu unterscheiden. Alle Ellipsen sind zueinander affin. Das Beispiel führt unmittelbar auf die folgenden Fragen:

- Wie kann festgestellt werden, ob zwei Muster zueinander affin sind?
- Wie können bei Vorlage eines affinen Musterpaares die Werte der affinen Transformationsparameter bestimmt werden?
- Wie kann, Parallelprojektion vorausgesetzt, aus dem Bild eines ebenen Objektes bekannter Gestalt auf die Aufnahmegeometrie zurückgeschlossen werden ?

Ein allgemeiner Lösungsansatz besteht im direkten Vergleich zwischen dem aktuellen Muster und den infrage kommenden Referenzmuster auf der Grundlage des Transformationsmodells. Dazu sind die Werte der Freiheitsgrade mit denen Passung erzielt wird zu bestimmen (engl.: *template matching*). Würde dies durch Berechnung von Kreuzkorrelationsfunktionen in n Freiheitsgraden (auf einer digitalen Rechenanlage) geschehen, dann wäre der numerische Aufwand von der Ordnung $\mathcal{O}(\textit{Anzahl der Referenzmuster} * \textit{Anzahl der Pixel/Bild} * \textit{Anzahl der Operationen/Pixel} * Q_1 * \ldots * Q_n)$. Hierin ist Q_i die Zahl der Quantisierungsschritte des $i-$ten Freiheitsgrads. Die affinen Transformationen lassen sich mit sechs unabhängigen reellen Freiheitsgraden angeben. Der Aufwand erreicht schon bei geringen Werten der einzelnen Faktoren eine Größenordnung, die eine Realisierung auf digitalen Rechenanlagen verbietet. Ein Grund dafür liegt in dem sogenannten *Korrespondenzproblem.* Dieses besteht darin, daß die Zuordnung zwischen Original- und Bildpunkten als unbekannt angenommen wird und deshalb eine Vielzahl von Bildtransformationen auszuführen sind.

Ein anderer Weg zur Lösung des Erkennungsproblems besteht darin, daß man auf die Identifizierung der Freiheitsgrade ganz verzichtet und aus dem Muster einen Satz von Merkmalen ableitet der unter den zulässigen Transformationen *invariant* ist. Zwei Muster die *nicht* in allen *Invarianten* (invariante Merkmale) übereinstimmen sind *nicht* äquivalent. Zwei Muster die in allen Invarianten übereinstimmen sind *möglicherweise* äquivalent. Sie sind *garantiert* äquivalent, wenn der Merkmalssatz neben der Eigenschaft der *Invarianz* die Eigenschaft der *Vollständigkeit* hat. Mit der Verwendung von Merkmalen vermeidet man den Aufwand für die Bildtransformationen. Allerdings gibt es keinen allgemeinen Ansatz zur Merkmalsgewinnung. Daher findet man in der Literatur eine Vielzahl von Merkmalen für die verschiedensten Problemklassen.

1.1 Invariante Merkmale zur Mustererkennung

Im Bereich der Grauwertbildverarbeitung gibt es viele Methoden zur Gewinnung von Merkmalen unterschiedlicher Invarianzleistung durch zweidimensionale Bildtransformationen [25,6,7,16,24,37,41]. Beispielsweise werden lineare Funktionaltransformationen, wie die Fouriertransformation, die Hadamardtransformation, die Fourier-Mellin-Transformation oder die Transformation in Momente, zugrunde gelegt, und durch nichtlineare Nachbearbeitung der Transformierten werden Invarianten abgeleitet. Das diskrete Amplitudenspektrum der Fouriertransformierten ist invariant gegenüber zyklischer Koordinatenverschiebung, was zur Bildung translationsinvarianter Merkmale genutzt wird. Diese sind nicht vollständig wegen des Verlusts der Phaseninformation bei der Nachbearbeitung des komplexen Spektrums. Entsprechendes gilt für die Modifizierte Walsh-Hadamard-Transformation (MWHT). Die Transformation selbst ist linear. Durch nichtlineare Verarbeitung der Transformierten gewinnt man ein zyklisch invariantes, jedoch nicht vollständiges Leistungsspektrum [6]. In [7] wird auf die Fouriertransformierte eine Phasennormierung ausgeübt, die auf vollständige Translationsinvarianten führt. Das Amplitudenspektrum der Fourier-Mellin-Transformierten ist streckungsinvariant [8,41]. Aus Momenten lassen sich, auf der Grundlage der klassischen Invariantentheorie [34,42], ähnlichkeitsinvariante *algebraische Formen* bilden [17]. Allerdings eignen sich Momente bzw. aus diesen abgeleitete Invarianten nur zur Darstellung einfacher, d.h. schwach strukturierter Objekte, da die Fehlerempfindlichkeit mit der Momentenordnung rasch ansteigt [27]. Eine Klasse nichtlinearer Transformationen führt unmittelbar, d.h. ohne Nachbearbeitung, auf zyklisch invariante Merkmale [6]. Dabei handelt es sich um Verallgemeinerungen der *Rapid- oder R-Transformation* nach [31]. Durch zweimalige Fouriertransformation und konforme Abbildung des Zwischenbildes lassen sich gleichzeitig Translationsinvarianz, Rotationsinvarianz und Streckungsinvarianz herbeiführen, was mit optischen Mitteln realisiert wurde [8]. Durch geometrische Bildtransformationen in kanonische Darstellungen lassen sich die Invarianzleistungen der Verfahren ergänzen. Dazu ist es notwendig, die Parameter der „kanonisierenden“ Transformation zu bestimmen. In [7] wird dazu aus dem Leistungsspektrum der Fouriertransformierten ein Winkel abgeleitet. Mit diesem werden translationsinvariante Merkmale in eine kanonische Darstellung bezüglich der Rotation transformiert. In [40] werden Parameter einer kanonisierenden affinen Transformation aus Momenten errechnet.

Häufig konzentriert sich Bildinformation auf *Linien*. Karikaturen liefern dafür ein besonders anschauliches Beispiel. Reduziert man ein Grauwertbild auf die in ihm vorhandenen charakteristischen Linien, dann erzielt man dadurch in der Regel eine drastische Reduktion des zu verarbeitenden Datenbestands. Oft sind Objekte durch *ebene* Linien charakterisiert. Beispiele dafür sind die Randlinien von Schriftzeichen oder die Bahnen auf

gedruckten Schaltungen. Abgesehen davon, daß bei den aus der Graubildverarbeitung bekannten Transformationen die hier geforderten Invarianzleistungen fehlen, ist in der Regel, aus Gründen des Aufwandes, von einer Anwendung auf den Sonderfall einfacher Kurven abzuraten.

Eine *geschlossene* Kurve kann durch eine periodische Funktion *nur eines* kontinuierlichen Parameters oder durch deren Fourierkoeffizienten dargestellt werden. Durch die Parameterdarstellung der Kurve wird der Transformationsaufwand gegenüber jenem, der zur 2-D Transformation erforderlich ist, im allgemeinen drastisch verringert. Die Fouriertransformation zeichnet sich durch ihre informationsverdichtende Eigenschaft in die Umgebung des spektralen Ursprungs aus. Um anzudeuten, daß aufgrund dieser Eigenschaft für den jeweiligen Zweck eine endliche, meist kleine Anzahl von Fourierkoeffizienten die Originalfunktion ausreichend beschreiben dürfte, werden die Fourierkoeffizienten auch *Fourierdeskriptoren* genannt. Die Qualität der Fourierdeskriptoren hinsichtlich Umkehrbarkeit, Fehlerempfindlichkeit und nicht zuletzt der Möglichkeit, Invarianten zu bilden, hängt wesentlich von der gewählten Parametrisierung ab. Der Punkt auf der Kurve, in dem der Kurvenparameter den Wert Null (oder ein ganzzahliges Vielfaches der Periode) annimmt, heißt *Aufpunkt.* Die Fourierkoeffizienten einer Kurve hängen von der Wahl des Aufpunktes ab. Üblicherweise versteht man unter *invarianten* (normierten) Fourierdeskriptoren solche, die neben der Invarianz bezüglich der Freiheitsgrade geometrischer Transformationen zusätzlich invariant hinsichtlich der Wahl des Aufpunktes sind.

In einigen Arbeiten werden zum Mustervergleich iterative Verfahren vorgeschlagen [32, 28,29, (ähnliche Konturen)] [22, (affine Konturen)], wobei die Zielfunktion jedoch nicht im Musterraum, sondern im Raum der Fourierdeskriptoren definiert wird. Der Vorteil gegenüber dem direkten Mustervergleich (s.o.) besteht im geringeren Aufwand aufgrund der Informationsverdichtung. Trotzdem verbleibt ein erheblicher Aufwand für die Optimierung, der für jeden zum Vergleich anstehenden Prototypen anfällt.

Invariante Fourierdeskriptoren erhält man durch Normierungen im Musterraum und/oder Normierungen im Raum der Fourierdeskriptoren. Eine Vielzahl von Normierungen wurde bezüglich der Freiheitsgrade der *Ähnlichkeitstransformation* und der Aufpunktverschiebung entwickelt (siehe Kapitel 9). Grundsätzlich erfolgte dabei die Konturbeschreibung im Musterraum durch eine Funktion der Bogenlänge [10,43,15,6,38,39,11,18,36]. Eine normierte Darstellung im Musterraum bezüglich aller Freiheitsgrade der Ähnlichkeitstransformation ist die Krümmung der auf den Umfang normierten Kontur. In [10,43] werden normierte Darstellungen aus dem Tangentenwinkel gewonnen. In [36] wird (sinngemäß) die erste Ableitung als Konturbeschreibung verwendet. All diese Normierungen beruhen auf der Bildung von Ableitungen. Die auf Ableitungen im Musterraum aufbauenden Invarianten sind naturgemäß fehlerempfindlich. In [15] wird erstmals die Kontur durch Angabe

des Ortes als Funktion der Bogenlänge dargestellt und ohne weitere Vorverarbeitung im Musterraum fouriertransformiert. Die Normierung bezüglich sämtlicher Freiheitsgrade erfolgt dort im Raum der Fourierdeskriptoren. Diese Vorgehensweise hat die Vorteile, daß der Vorverarbeitungsaufwand entfällt und die Ergebnisse weniger fehlerempfindlich sind. Sie hat sich weitgehend durchgesetzt [15,6,38,39,11,18]. In [6,11] steht die Bildung von *vollständigen* Invariantensätzen im Vordergrund. In [6] wird außerdem die Identifizierung der Transformationsparameter ähnlicher Kurven angegeben. In der englischen Zusammenfassung einer japanisch geschriebenen Arbeit [22] wird irrtümlich behauptet, die Bildung *affininvarianter* Fourierdeskriptoren sei nicht möglich.

1.2 Gegenstand der Arbeit

In der vorliegenden Arbeit

- werden für ebene Kurven affininvariante Fourierdeskriptoren entwickelt. Dabei wird besonderes Gewicht auf die Bildung vollständiger Invariantensätze gelegt.
- werden Formeln zur eindeutigen Berechnung der affinen Transformationsparameter aus Fourierdeskriptoren hergeleitet.
- wird eine Anwendung zur Bestimmung der räumlichen Position und Orientierung ebener Objekte behandelt.

1.3 Inhaltsübersicht

In Kapitel 3 werden Kurvenparameter eingeführt, welche unter den affinen Abbildungen und der freien Wahl des Aufpunktes *linear* transformiert werden. Mit dieser Eigenschaft wird erreicht, daß die Linearität der affinen Transformation im Spektralraum erhalten bleibt. Möglichkeiten zur entsprechenden Darstellung *einfach offener* Kurven werden angegeben. In Kapitel 4 wird die Normierung der Fourierdeskriptoren bezüglich der Freiheitsgrade der *affinen* Transformationen behandelt. Dabei wird in der Hauptsache ein vollständiges und minimales Invariantensystem hergeleitet und diskutiert. Ergänzend wird auf die Bildung von gruppenspezifischen Invarianten (nicht gleichzeitig Invarianten einer Obergruppe) für Untergruppen der affinen Gruppe eingegangen. In Kapitel 5 wird die Normierung bezüglich der *freien Wahl des Aufpunktes* behandelt. Auch hier steht die Erhaltung der Vollständigkeit im Vordergrund. Ausgehend von einem allgemeinen Ansatz wird ein Bildungsgesetz hergeleitet, das minimalen Informationsverlust durch die Normierung garantiert. In Kapitel 6 werden die Ergebnisse aus den vorangegangenen Kapiteln kombiniert, mit dem Ergebnis, daß *gleichzeitig Affininvarianz, Invarianz bezüglich*

des Aufpunkts, Vollständigkeit und Minimalität erzielt werden. Die Ausführungen werden durch eine Reihe von Beispielen ergänzt, vor allem von Beispielen zum Fehlerverhalten.

Das zur Bestimmung von Invarianten duale Problem, nämlich die Bestimmung von Transformationsparametern, wird in Kapitel 7 behandelt. Zunächst werden Formeln zur Berechnung der affinen Transformationsparameter in der Musterebene hergeleitet. Das erzielte Ergebnis zeichnet sich durch besonders geringen numerischen Aufwand aus, vor allem dann, wenn eine Invariantenberechnung vorausgegangen ist und die dazu erforderlichen Fourierdeskriptoren schon vorliegen. Ein weiterer Vorzug besteht darin, daß das Verfahren weder Vorinformation, etwa in Form von Paßpunkten, noch Näherungswerte für die Parameter erfordert. Ergänzend wird die Rückrechnung der räumlichen Lage und Orientierung ebener Kurven aus deren Kamerabild behandelt. Entsprechende Abhandlungen findet man in der Literatur an verschiedenen Stellen, z.B. [13]. Hier wird insbesondere darauf Wert gelegt Grenzen dieser naheliegenden Anwendung aufzuzeigen. Beispiele ergänzen auch diese Ausführungen wobei vor allem das Fehlerverhalten diskutiert wird.

In der Literatur über Fourierdeskriptoren wird gelegentlich die Anwendung der „schnellen Fouriertransformation“ (Fast Fourier Transform: FFT) erwähnt [32,38,39]. Auf die damit zusammenhängende Problematik wird in Kapitel 8 eingegangen. Transformationsformeln, die dem hier verfolgten Zweck besser angepaßt sind, werden entwickelt.

Auf Arbeiten, die zu der vorliegenden in einer engeren Beziehung stehen, wird in Kapitel 9 detailliert eingegangen.

2 Grundlagen

2.1 Die affine Abbildung in der Ebene

Die *geometrischen* Freiheitsgrade der *affinen* Abbildungen in der Ebene sind:

1. Translation,
2. Rotation,
3. Zentrische Streckung (incl. Spiegelung),
4. Scherung.

Die Spiegelung wird gelegentlich ausgeschlossen. Die *ähnlichen* Abbildungen haben den ersten, zweiten und dritten Freiheitsgrad, die *kongruenten* den ersten und zweiten, und die *Parallelverschiebungen* nur den ersten. Die *Scherung* bewirkt eine *Verzerrung* der Gestalt.

Im Beispiel nach Bild 1 ist die Kurve „k“ kongruent, die Kurve „a“ ähnlich und die Kurve „A“ affin zu der mit „R“ bezeichneten Referenzkurve. Diese vier Kurven sind zueinander affin. Die Kurve „⋆“ ist kein affines Bild der Kurve „R“ und ist daher auch zu keiner der übrigen Kurven affin.

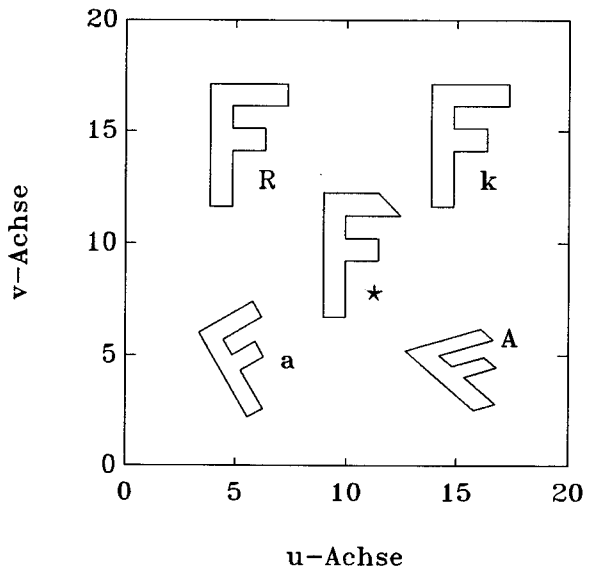

Bild 1: Affine Bilder und ein nicht affines Bild „⋆“ des ebenen Referenzbildes „R“. Das Bild „k“ ist außerdem kongruent, das Bild „a“ ähnlich zu „R“.

2.1.1 Affine Abbildung in der reellen Ebene $\mathbf{R}^2$

Die umkehrbare lineare Abbildung $x^0 \rightarrow x$ im $\mathbf{R}^n$

$$x = Ax^0 + x_0, \qquad det(A) = \mid A \mid \neq 0 \tag{1}$$

mit der reellen Matrix $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ und dem reellen Vektor $x_0 \in \mathbf{R}^n$ heißt *affine* Abbildung. Für den $\mathbf{R}^2$ lautet sie ausgeschrieben:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^0 \\ v^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}, \qquad D = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0.$$

Die affinen Abbildungen bilden eine Gruppe. Deren wichtigste Untergruppen sind

- die Ähnlichkeitsgruppe : $A^T A = |A|^2 E$,
- die Kongruenzgruppe : $A^T A = E$,
- die Gruppe der Parallelverschiebungen : $A = E$.

Das hochgestellte T bedeutet „transponiert“ und E die „Einheitsmatrix“. Im Falle negativer Determinante D liegt Spiegelung vor.

2.1.2 Affine Abbildung in der komplexen Ebene C

Faßt man x und x^0 als komplexe Zahlen auf:

$$x = u + jv, \qquad x^0 = u^0 + jv^0, \qquad j = \sqrt{-1},$$

so lautet die affine Abbildung $x^0 \rightarrow x$ in der komplexen Ebene:

$$x = ax^0 + bx^{0*} + c, \qquad D = aa^* - bb^* \neq 0. \tag{2}$$

mit den komplexen Abbildungsparametern a, b und c. Der hochgestellte Stern bedeutet „konjugiert komplex“. Für die o.g. Untergruppen der affinen Gruppe gilt jetzt unter Ausschluß der Spiegelung:

- Ähnlichkeitsgruppe : $\mid a \mid \neq 0 \quad \wedge \quad b = 0$,
- Kongruenzgruppe : $\mid a \mid = 1 \quad \wedge \quad b = 0$,
- Gruppe der Parallelverschiebungen : $a = 1 \quad \wedge \quad b = 0$.

Bei Spiegelung sind die Rollen von a und b vertauscht, und D ist dann negativ.

2.1.3 Beziehungen zwischen den Abbildungsparametern

Zwischen den reellen und komplexen Parametern bestehen umkehrbar eindeutige Beziehungen. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) + \frac{j}{2}(a_{21} - a_{12}), && (3)\\
b &= \frac{1}{2}(a_{11} - a_{22}) + \frac{j}{2}(a_{21} + a_{12}), && (4)\\
c &= u_0 + jv_0, && (5)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} \Re(a+b) & -\Im(a-b) \\ \Im(a+b) & \Re(a-b) \end{pmatrix}, && (6)\\
x_0 &= \begin{pmatrix} \Re(c) \\ \Im(c) \end{pmatrix}, && (7)
\end{aligned}
$$

mit $\Re$ für *Realteil* und $\Im$ für *Imaginärteil.* Ferner gilt:

$$D = \det(A) = \mid A \mid = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = aa^* - bb^*. \qquad (8)$$

2.2 Zum Begriff der Invariante einer Punktmenge

Eine Punktmenge $\mathbf{M}^0 = \{x^0\}$ sei der Prototyp aller Punktmengen einer bestimmten Klasse. Irgendeine Punktmenge $\mathbf{M} = \{x\}$ gehört zu der durch $\mathbf{M}^0$ repräsentierten *Äquivalenzklasse*, wenn unter den Abbildungen, welche die Klassenbildung vermitteln, eine *existiert*, die $\mathbf{M}^0$ auf $\mathbf{M}$ abbildet. Die Äquivalenz zweier Punktmengen $\mathbf{M}^0$ und $\mathbf{M}$ wird durch $\mathbf{M} \sim \mathbf{M}^0$ angegeben.

Beispiel: Zur Äquivalenz geometrischer Figuren

- In der Gruppe der <u>affinen</u> Abbildungen gilt:
  Kreis $\sim$ *Ellipse* und
  Parallelogramm $\sim$ *Rechteck* $\sim$ *Quadrat*, aber
  Kreis $\not\sim$ *Quadrat.*

- In der Gruppe der <u>ähnlichen</u> Abbildungen gilt dagegen:
  $Kreis(Mittelpunkt_1, Radius_1) \sim Kreis(Mittelpunkt_2, Radius_2)$, aber
  Kreis $\not\sim$ *Ellipse* und
  Parallelogramm $\not\sim$ *Rechteck* $\not\sim$ *Quadrat.*

Es sei $\mathcal{T} : \mathbf{M} \to I = \{I_k | k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ eine Transformation der Punktmenge $\mathbf{M}$ in eine diskrete, geordnete Folge I von Zahlenwerten, und $\mathcal{T} : \mathbf{M}^0 \to I^0 = \{I_k^0 | k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ dieselbe Transformation angewandt auf $\mathbf{M}^0$.

- Die Folge I heißt (relatives) *Invariantensystem*, wenn für jedes $\mathbf{M} \sim \mathbf{M}^0$ eine Konstante μ existiert, so daß gilt: $I = \mu I^0$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{M} & \sim & \mathbf{M}^0 \\ \mathcal{T} \Downarrow & & \Downarrow \mathcal{T} \\ I & = & \mu I^0 \end{array}$$

- Sie heißt *absolutes* Invariantensytem, wenn für jedes $\mathbf{M} \sim \mathbf{M}^0$ gilt: $I = I^0$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{M} & \sim & \mathbf{M}^0 \\ \mathcal{T} \Downarrow & & \Downarrow \mathcal{T} \\ I & = & I^0 \end{array}$$

- Sie heißt *vollständig*, wenn darüber hinaus für alle $\bar{\mathbf{M}} \not\sim \mathbf{M}^0$ und für alle $\mu \neq 0$ gilt: $\bar{I} \neq \mu I^0$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{M} & \sim & \mathbf{M}^0 \\ \mathcal{T} \Downarrow & & \Downarrow \mathcal{T} \\ I & = & \mu I^0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \bar{\mathbf{M}} & \not\sim & \mathbf{M}^0 \\ \mathcal{T} \Downarrow & & \Downarrow \mathcal{T} \\ \bar{I} & \neq & \mu I^0 \end{array}$$

- Sie heißt *umkehrbar*, wenn außerdem eine inverse Transformation $\mathcal{T}' : I \to \mathbf{M}'$ existiert, so daß gilt: $\mathbf{M}' \sim \mathbf{M}^0$. Im Gegensatz zum üblichen Sprachgebrauch verlangt der Begriff „umkehrbar“ hier *nicht die Identität*, sondern nur die *Affinität* zwischen dem Original $\mathbf{M}$ und dem Bild $\mathbf{M}'$. Ein umkehrbares Invariantensystem ist auch vollständig, ein vollständiges nicht notwendigerweise umkehrbar. Wenn also für ein Invariantensystem die Umkehrbarkeit gezeigt werden kann, dann ist damit auch gleichzeitig die Vollständigkeit bewiesen.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{M} & \sim & \mathbf{M}^0 \\ \mathcal{T} \Downarrow & & \Downarrow \mathcal{T} \\ I & = & \mu I^0 \\ \mathcal{T}' \Downarrow & & \\ \mathbf{M}' & \sim & \mathbf{M}^0 \end{array}$$

Die Begriffe *Invariante* und *Vollständigkeit* haben allgemein Gültigkeit. Sie unterscheiden sich dadurch von den unscharfen Begriffen *Merkmale* und *Selektivität.* Merkmale sind Größen, die unter den zulässigen Abbildungen annähernd konstant sind. Sie heißen selektiv, wenn deren Werte mit hoher Wahrscheinlichkeit den Schluß auf die Zugehörigkeit zu einer Äquivalenzklasse zulassen.

Beispiel: Der Quotient $Kompaktheit = Fläche/Umfang^2$ ist eine absolute Invariante unter der Ähnlichkeitsgruppe, aber keine Invariante unter der affinen Gruppe. In Bild 2 wird die Scherung (affine Verzerrung) durch den Neigungswinkel einer Ebene, in welche die dargestellten Muster parallel projiziert wurden, ausgedrückt. Neigungen in verschiedene Richtungen führen auf Kurvenscharen für die Kompaktheit. Die Kurvenscharen für den Kreis fallen zusammen. Beim Neigungswinkel Null (Ähnlichkeitsabbildung) sind alle fünf Muster nur an diesem einzigen Merkmal unterscheidbar. Die Kurvenscharen erweitern sich nur langsam mit zunehmendem Neigungswinkel (zunehmende affine Verzerrung), so daß noch bei erheblicher Neigung eine Unterscheidung möglich ist. Das Beispiel soll die Unterschiede zwischen *Merkmalen* und *Invarianten* sowie zwischen *Vollständigkeit* und *Selektivität* veranschaulichen. Unter den Freiheitsgraden der Parallelprojektion handelt es sich hier offensichtlich um ein Merkmal mit ausreichender Selektivität zur Unterscheidung der dargestellten Objekte innerhalb eines begrenzten Intervalls des Neigungswinkels.

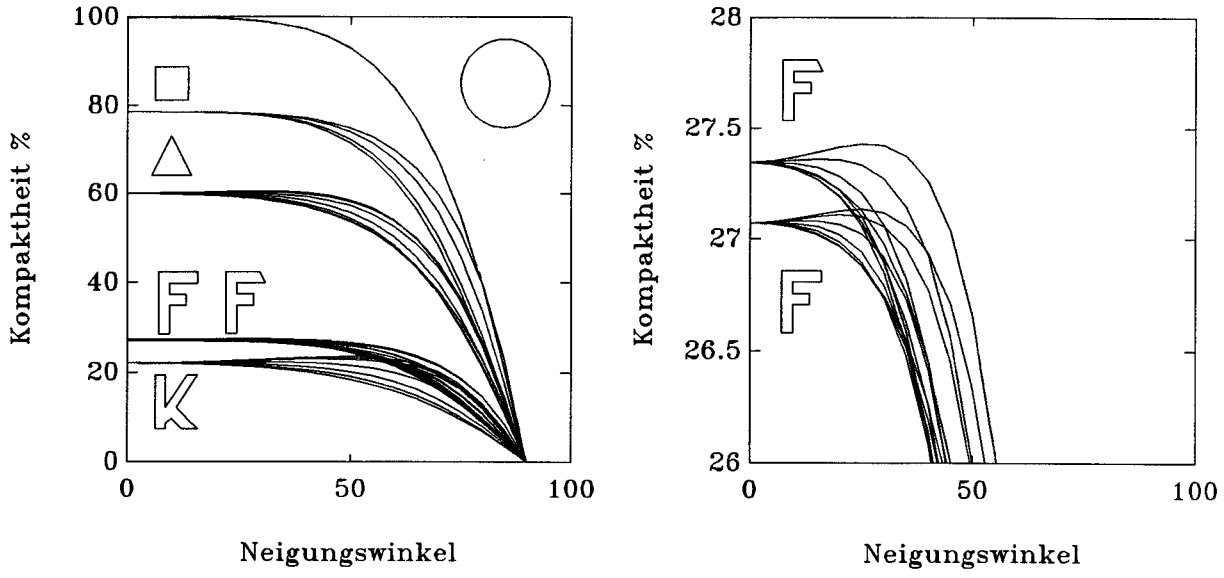

Bild 2: Kompaktheit unter Parallelprojektion für verschiedene Objekte in % bezogen auf den Kreis.

3 Konturbeschreibungen

Die Randlinie $\mathcal{C}$ eines *einfachen, ebenen und beschränkten* Zusammenhangsgebietes heißt *Kontur*. Sie ist notwendigerweise geschlossen. Hier wird der Begriff Kontur zur Bezeichnung ebener, geschlossener Kurven verwendet, ohne Rücksicht darauf, wie diese entstanden sind. Für die mathematische Behandlung ebener Kurven ist es prinzipiell unwesentlich, ob die Darstellung in der komplexen Ebene $\mathbf{C}$ oder dem $\mathbf{R}^2$ erfolgt. Nachfolgend wird die für den jeweiligen Zweck geeigneter erscheinende benutzt.

3.1 Kontinuierliche Parameterdarstellung

In diesem Abschnitt wird $\mathcal{C}$ als Kurve im $\mathbf{R}^2$ aufgefaßt. Es sei t eine über $\mathcal{C}$ definierte, kontinuierliche skalare Funktion, die in einem Punkt $P_0 \in \mathcal{C}$, dem *Aufpunkt*, den Wert Null und nach einem vollen Umlauf den Wert T annehme. Dann ist die Kontur durch eine periodische Funktion $x(t)$ mit der Periode T darstellbar. In diesem Sinne ist die Bogenlänge eine parametrisierende Funktion. Diese wird hier zwar nicht benutzt, eignet sich jedoch, um Eigenschaften verschiedener Parametrisierungen aufzuzeigen:

- Ist $t(l)$ eine *streng monotone* Funktion der Bogenlänge l, dann ist $x(t)$ eine stetige Funktion des *kontinuierlichen* Parameters t.
- Ist $t(l)$ monoton, aber *nicht streng monoton*, so ist $x(t)$ unstetig, nämlich überall dort, wo die strenge Monotonie verletzt wird.
- Ist $t(l)$ *nicht monoton*, dann ist $x(t)$ mehrdeutig.

Ein Beispiel dazu ist in Bild 3 angegeben. Links oben sind drei Parameter $t0, t1$ und $t2$ als Funktionen der Bogenlänge dargestellt. Die Funktion $t0(l)$ ist streng monoton, $t1(l)$ ist nicht monoton und $t2(l)$ ist monoton. An einer Stelle verschwindet jedoch die Ableitung von $t2(l)$ (waagrechte Tangente). Daher ist $t2(l)$ nicht streng monoton. Die Funktionen $t1$ und $t2$ haben dem Betrage nach dieselben Ableitungen. Sie unterscheiden sich nur dadurch, daß das Vorzeichen der Ableitung von $t1(l)$ wechselt, während die Ableitung von $t2(l)$ nirgends negativ ist. Man erhält somit die monotone Funktion $t2(l)$, indem man über den Betrag der Ableitung der nicht monotonen Funktion $t1(l)$ integriert. In den übrigen Teilbildern sind die Parameterintervalle als horizontale Strecken dargestellt und darüber jeweils dasselbe Kurvenstück. Die Zuordnungen der Parameterwerte zu den Kurvenpunkten sind durch gerade Verbindungslinien markiert. Die Abbildung der Parameterskala $t0$ auf die Kurve ist eindeutig (rechts oben). Die Abbildung der Parameterskala $t1$ auf die Kurve ist doppeldeutig (links unten). Die Doppeldeutigkeit wird dadurch beseitigt,

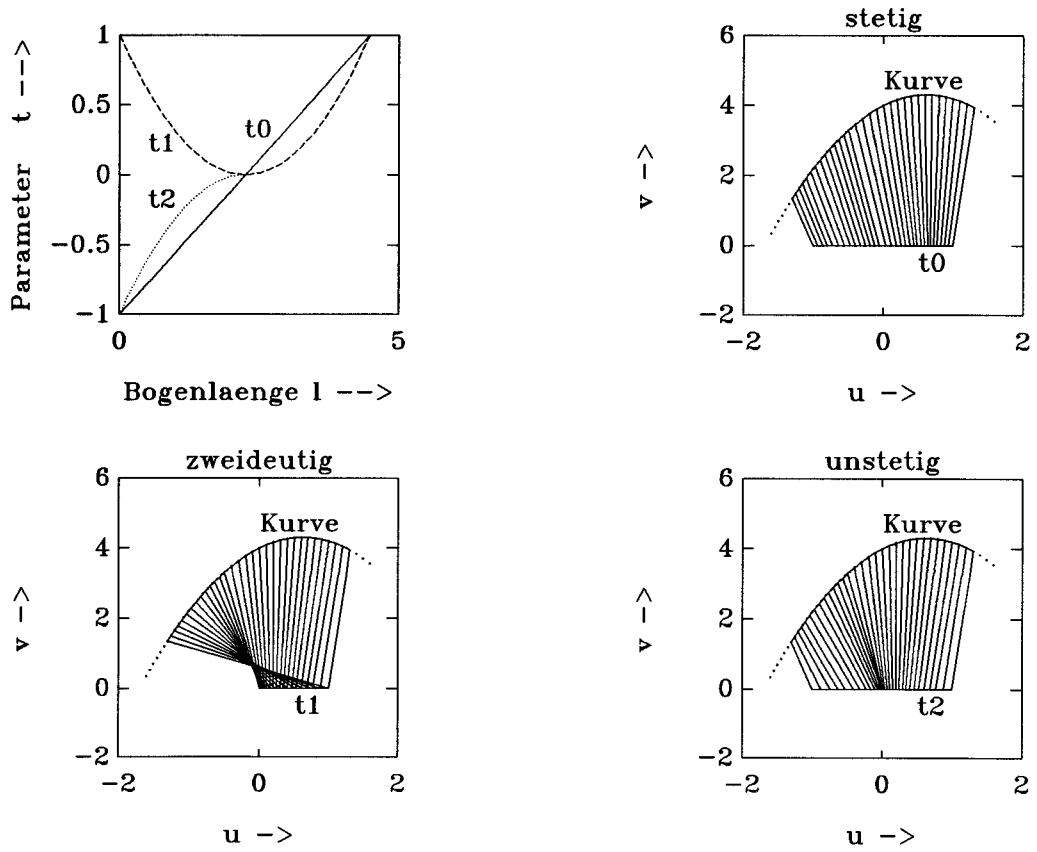

Bild 3: Zur Stetigkeit und Eindeutigkeit der Parameterdarstellung von Kurven

daß das „gefaltete" Parameterintervall „aufgeklappt" wird (rechts unten). Die Unstetigkeitsstelle wird dadurch deutlich, daß sich Geraden, welche die Zuordnung zwischen den Kurvenpunkten und den Parameterwerten markieren, in einem Punkt des Parameterintervalls (hier an der Stelle $t2 = 0$) treffen.

In den vorstehenden Betrachtungen kann jede umkehrbar eindeutige Parametrisierung die Rolle der Bogenlänge übernehmen. Die Ausführungen wurden nur aus Gründen der Anschaulichkeit auf die Bogenlänge bezogen. Um dies in der Notation zum Ausdruck zu bringen wird nachfolgend eine anfängliche Parameterskala ξ vorausgesetzt, die jedem Punkt der Kurve umkehrbar eindeutig einen Parameterwert zuordnet. Von nun an werden nur solche Parameter

$$t = \int_c dt$$

zugelassen, deren Differentiale den folgenden zwei Bedingungen genügen:

1. Das Differential dt ist von einer ursprünglichen Parameterisierung unabhängig. Parameter, welche dieser Bedingung genügen, heißen ihrerseits *parameterinvariant* [35].

2. Das Differential dt eines affinen Bildes C der Kurve C^0 steht zum Differential dt^0 in einem konstanten Verhältnis. Parameter, welche dieser Bedingung genügen, werden unter der affinen Abbildung *linear* transformiert.

Zu 1. : Beispielsweise ist das Differential der Bogenlänge unabhängig von einer zufälligen Parameterskala ξ, mittels der die Kurve ursprünglich beschrieben wurde [35].

Zu 2. : Unter einer affinen Abbildung werden Bogenelemente, abgesehen von Bogenelementen auf parallelen Geraden, nicht mit konstantem Maßstabsfaktor abgebildet. Daher erfüllt die Bogenlänge nicht die zweite Bedingung.

Ist $x(\xi)$ eine *analytische Kurve*, und ist $x_\xi^{(n)}$ deren n-te Ableitung nach ξ, so lassen sich unter Verwendung der *äußeren Produkte* zweier aufeinanderfolgender Ableitungen Parameter bilden, die beiden Bedingungen genügen (siehe Anhang). Für deren Differentiale gilt:

$$dt = \sqrt[2n+1]{[x_\xi^{(n)}, x_\xi^{(n+1)}]}\, d\xi = \sqrt[2n+1]{\begin{vmatrix} u_\xi^{(n)} & u_\xi^{(n+1)} \\ v_\xi^{(n)} & v_\xi^{(n+1)} \end{vmatrix}}\, d\xi, \qquad n \geq 1. \tag{9}$$

Das Außenprodukt wird durch die Klammern [ ] bezeichnet. Die Differentiale sind parameterinvariant und affininvariant bis auf einen konstanten Faktor (siehe Anhang). Sie erfüllen daher beide Bedingungen. Ähnliche Ausführungen findet man in [12].

Für das Differential bei *niedrigster*, nämlich zweiter Differentiationsordnung gilt mit $n = 1$:

$$dt = \sqrt[3]{[x_\xi, x_{\xi\xi}]}\, d\xi = \sqrt[3]{\begin{vmatrix} u_\xi & u_{\xi\xi} \\ v_\xi & v_{\xi\xi} \end{vmatrix}}\, d\xi. \tag{10}$$

Dabei handelt es sich um das Differential der sogenannten *Affinlänge* ebener Kurven (siehe [23]). Hierin sind $x_\xi = (u_\xi, v_\xi)^T$ die erste und $x_{\xi\xi} = (u_{\xi\xi}, v_{\xi\xi})^T$ die zweite Ableitung der Funktion $x(\xi)$ bezüglich irgendeines ursprünglichen Parameters ξ. Das Differential der Affinlänge läßt sich auch durch $\sqrt[3]{\kappa(l)}dl$ darstellen, wobei $\kappa(l)$ die Krümmung der Kurve als Funktion der Bogenlänge bedeutet. Dies ist bemerkenswert, da die Krümmung schon bei kongruenten Kurven die fundamentale Differentialinvariante ist [35]. Die Verwendung der Affinlänge als Parameter führt auf die folgenden Schwierigkeiten:

- Die zweite Ableitung muß existieren. Sie existiert jedoch nicht in Eckpunkten von Kurven.
- Die zweite Ableitung, also auch das Differential, verschwindet entlang Geradenstücken. Die Affinlänge erfährt somit entlang Geraden keine Veränderung. Daher führt die Parametrisierung mit der Affinlänge auf Unstetigkeiten entlang Geradenstücken.

In der Praxis kommen häufig Polygone vor. Aus den vorgenannten Gründen folgt, daß die Affinlänge nicht geeignet ist, Polygone zu parametrisieren. Das eigentliche Problem liegt im Auftreten der zweiten Ableitung, die entlang den Seiten verschwindet und in den Eckpunkten nicht existiert. Um diese zu vermeiden, betrachten wir das Differential nach Gleichung (9) für den Fall $n = 0$. Unter den affinen Transformationen gilt:

$$[x(\xi), x_\xi] = |A|[x^0(\xi), x^0_\xi] + [x_0, Ax^0_\xi].$$

Daraus folgt: Das Differential

$$dt = [x(\xi), x_\xi]\, d\xi$$

wird im Falle $x_0 = 0$ proportional transformiert. Der Proportionalitätsfaktor ist $|A|$. Es ist darüber hinaus parameterinvariant. Es erfüllt somit unter den *homogenen* affinen Transformationen beide Bedingungen für gültige Parameter bei *nur erster* Differentiationsordnung. Damit sind die mit der zweiten Ableitung auftretenden Schwierigkeiten für die homogenen affinen Transformationen gelöst. Die inhomogene affine Transformation $x = Ax^0 + x_0$ kann jedoch in eine homogene $(x - x') = A(x^0 - x^{0'})$ umgeschrieben werden, wenn zwischen x' und $x^{0'}$ die Beziehung $x' = Ax^{0'} + x_0$ gilt. Um das Ergebnis allgemein anwenden zu können, kommt es also darauf an, aus $\mathcal{C}^0$ einen Punkt $x^{0'}$ abzuleiten, dessen Bildpunkt x' aus $\mathcal{C}$ wiedergefunden werden kann. Hier soll davon abgesehen werden, daß in Sonderfällen markante Punkte oder Fixpunkte vorliegen. Vielmehr wird ein allgemein verwendbares Verfahren angegeben.

Für den Flächenschwerpunkt der Kurve $\mathcal{C}$ gilt unabhängig von einer ursprünglichen Parameterskala ξ (siehe Anhang C):

$$x_S = \frac{2}{3}\frac{\oint_{\mathcal{C}} x(\xi)[x(\xi), x_\xi]\, d\xi}{\oint_{\mathcal{C}} [x(\xi), x_\xi]\, d\xi}. \tag{11}$$

Die affinen Abbildungen bilden Flächenschwerpunkte aufeinander ab (siehe Anhang): $x_S = Ax^0_S + x_0$. Daher kann jede inhomogene affine Abbildung $\mathcal{C}^0 \to \mathcal{C}$ mit $\{A, x_0\}$ durch Verschiebung der Kurven, so daß ihre Flächenschwerpunkte x_S und x^0_S im Ursprung des Koordinatensystems zusammenfallen, in eine homogene affine Abbildung mit $\{A, 0\}$ überführt werden.

$$\begin{array}{ccc} x^0 & \xrightarrow{\{A, x_0\}} & x \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ x^0 - x^0_S & \xrightarrow{\{A, 0\}} & x - x_S \end{array}$$

Somit ist das Differential

$$dt = [x(\xi) - x_S, x_\xi]\, d\xi$$

ein *gültiges Parameterdifferential* unter den *inhomogenen* affinen Transformationen bei nur erster Differentiationsordnung.

Als nächstes wird dieses Differential geometrisch gedeutet. Der Betrag des Differentials ist die doppelte (positive) Fläche des Segments, welches von dem Kurvenstück $d\xi$ und den beiden Verbindungsgeraden vom Flächenschwerpunkt S zu den Endpunkten des Kurvenstücks eingeschlossen wird (siehe Bild 4). Sein *Vorzeichen* hängt vom *Umlaufsinn*

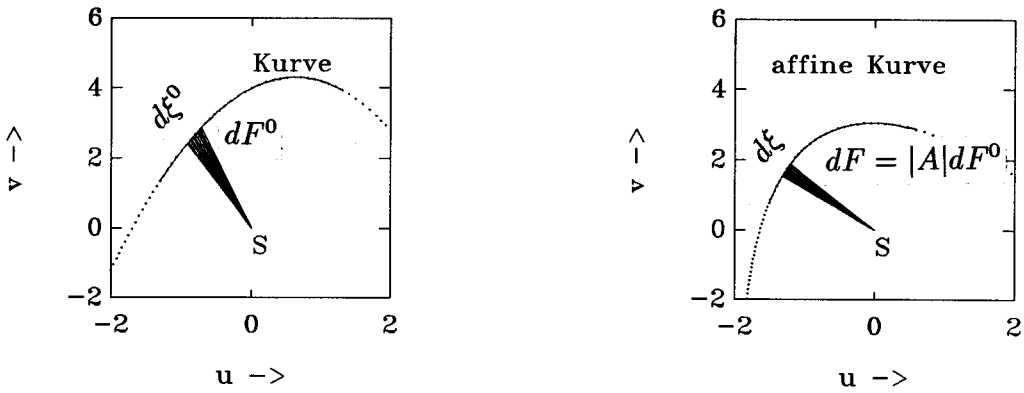

Bild 4: Flächendifferentiale unter einer affinen Transformation

bezüglich des Flächenschwerpunkts bei wachsendem ξ ab. Es ist positiv im Gegenuhrzeigersinn und negativ im Uhrzeigersinn. Dementsprechend wächst das Integral über dt, wenn mit zunehmendem ξ die Kurve entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen wird, es fällt, wenn sie im Uhrzeigersinn durchlaufen wird, und es bleibt *konstant* entlang *radialer* Kurvenstücke. Daher ist das Integral im allgemeinen nicht monoton, und parametrisiert dann die Kurve *nicht* eindeutig (s.o.). Ferner ist die parametrisierte Funktion $x(t)$ entlang radialer Kurvenstücken *unstetig.*

Die Mehrdeutigkeit kann auf einfache Weise behoben werden, wie eingangs dargestellt wurde. Aus

$$dt = |A|dt^0$$

folgt für den Betrag des Differentials:

$$|dt| = ||A||\,|dt^0| \qquad ||A|| \ldots \text{Betrag der Determinante von } A.$$

Die Betragsbildung läßt die Proportionalität unter den affinen Transformationen unberührt. Man erhält somit einen weiteren *gültigen* Parameter, indem man nicht über

vorzeichenbehaftete Flächenelemente, sondern über *absolute* Flächenelemente integriert. Dieser ist monoton, jedoch nicht streng monoton, er parametrisiert daher die Kurve eindeutig, außer an Unstetigkeitsstellen.

Hier scheint ein Widerspruch vorzuliegen. Einerseits verzichtet man auf Information, nämlich auf das Vorzeichen des Differentials, anderseits gewinnt man dadurch Information, nämlich die eindeutige Parameterdarstellung anstelle einer mehrdeutigen. Dabei ist zu bedenken, daß es sich jeweils um völlig verschiedene Informationen handelt. Die anschauliche geometrische Bedeutung des vor. Differentials geht verloren. Auf diese kommt es hier jedoch gar nicht an. Wie eingangs ausgeführt wurde, kommt es bezüglich Eindeutigkeit nur auf Monotonieeigenschaften an. Zusammenfassend gilt:

Satz 1 : Kurvenparameter

Unter den inhomogenen *affinen Transformationen sind*

$$t = \frac{1}{2}\int_C [x(\xi) - x_S, x_\xi]\, d\xi \qquad \underline{\textit{vorzeichenbehaftete (vor.) Fläche}} \tag{12}$$

und

$$t = \frac{1}{2}\int_C |\, [x(\xi) - x_S, x_\xi]\, |\; d\xi \qquad \underline{\textit{absolute (abs.) Fläche}} \tag{13}$$

gültige *Parameter von* niedrigster, *nämlich erster Differentiationsordnung. Die Verwendung dieser Parameter führt im allgemeinen auf Unstetigkeiten der parametrisierten Kurve, nämlich dort, wo die Kurve radial in bezug auf den Flächenschwerpunkt verläuft. Die Verwendung des ersten Parameters führt darüber hinaus auf Mehrdeutigkeiten, wenn der Umlaufsinn in bezug auf den Flächenschwerpunkt wechselt.*

Parametertransformation unter der affinen Abbildung

Es sei $\mathcal{C}$ ein affines Bild der Kontur $\mathcal{C}^0$. Es sei t eine Parameterskala über $\mathcal{C}$ und t^0 über $\mathcal{C}^0$, jeweils entweder nach (12) oder nach (13).

Zwischen den Parameterwerten *korrespondierender* Punkte auf $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}^0$ gilt in beiden Fällen die lineare Beziehung

$$t = \mu(t^0 + \tau), \quad \text{mit} \quad \mu = |\, A\, | \quad \text{bzw.} \quad \mu = ||\, A\, ||,$$

wobei τ verschwindet, wenn der Aufpunkt auf $\mathcal{C}$ Bildpunkt des Aufpunktes auf $\mathcal{C}^0$ ist. Andernfalls spricht man von *Aufpunktsverschiebung.* Für die Perioden gilt:

$$T = \mu T^0, \quad \text{mit} \quad \mu = |\, A\, | \quad \text{bzw.} \quad \mu = ||\, A\, ||\,.$$

- Bei der Darstellung zweier Kurven $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}^0$ durch Punktmengen wird die Frage, welche Punkte zueinander korrespondieren, d.h. Original- und Bildpunkte sind, nicht beantwortet (*Korrespondenzproblem*). Durch Parametrisierung werden die Punktmengen geordnet. Mit den angegebenen Parametern reduziert sich das zunächst unendliche Korrespondenzproblem auf eines zwischen zwei ausgezeichneten Punkten, den Aufpunkten auf $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}^0$. Es gilt nämlich bei Normierung der Parameter auf die jeweilige Periode: $t/T = t^0/T^0 + \tau/T^0$ mit der einzigen Unbekannten τ.

- Die Periode T mit dem Wert des Integrals (12) bzw. (13) nach einem vollständigen Umlauf ist eine (relative) Affininvariante.

Beispiele

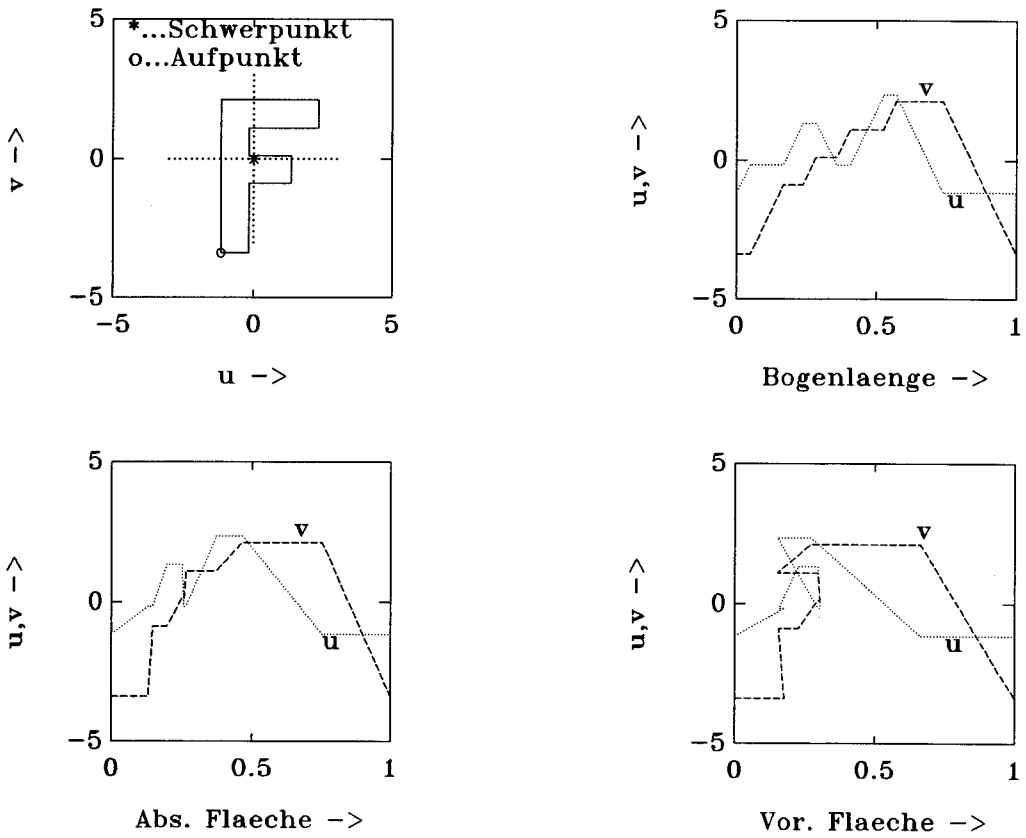

Bild 5: Komponenten einer ebenen Kurve als Funktionen verschiedener Kurvenparameter

In Bild 5 ist links oben ist eine ebene Kurve mit dem Flächenschwerpunkt im Koordinatenursprung dargestellt. Die übrigen Teilbilder zeigen die Komponenten u und v als Funktionen verschiedener Parameter, nämlich der Bogenlänge, der abs. Fläche und der

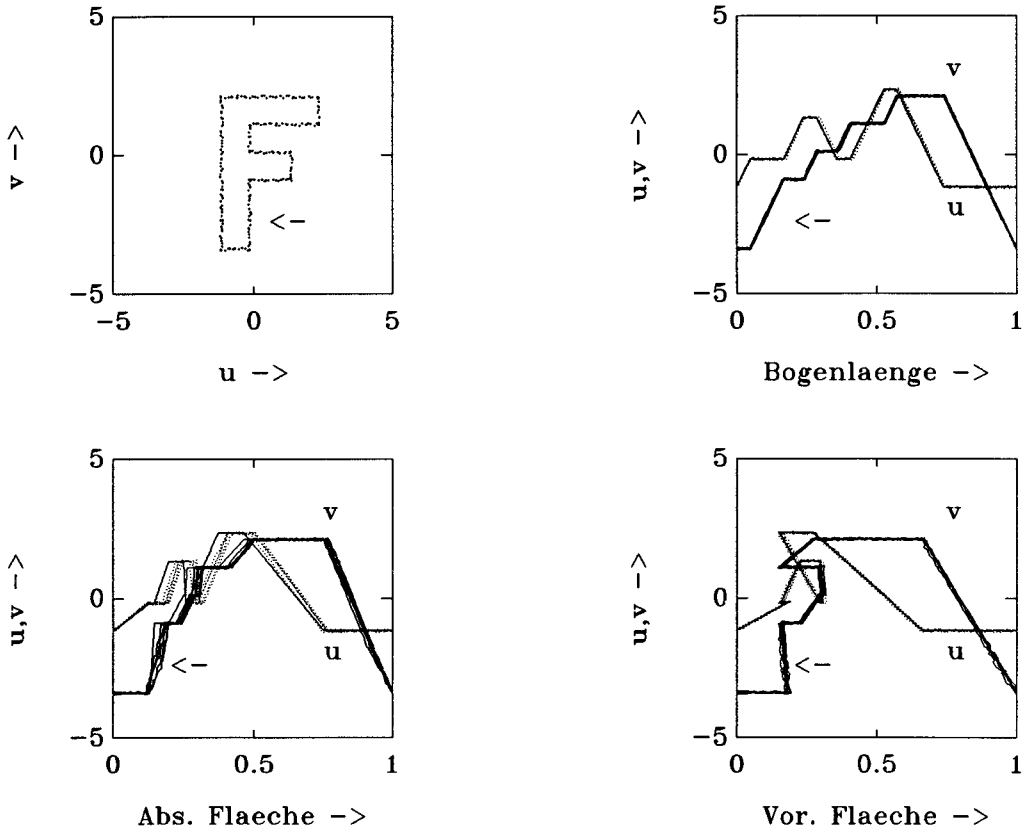

Bild 6: Komponenten einer Kurve bei Konturfehlern

vor. Fläche. Die Parametrisierung erfolgt, jeweils vom linken unteren Eck (Aufpunkt) ausgehend, entgegen dem Uhrzeigersinn. Bei Parametrisierung über der Bogenlänge ist die Steigung der Komponenten auf das Intervall zwischen -1 und $+1$ beschränkt. In dem vorliegenden Beispiel (rechts oben) wechselt die Steigung zwischen Null und den Extremwerten, da die Seiten der Kurve nur senkrecht und parallel zu den Koordinatenachsen orientiert sind. Dagegen treten bei Parametrisierung durch die abs. Fläche (links unten) sehr viel größere Steigungen auf, insbesondere dort, wo die Verbindungslinie vom Flächenschwerpunkt zur Kurve sich mit einem Kurvenstück fast deckt („fast unstetig"). Beim Entlanglaufen auf der Kurve gilt für den Umlaufsinn ($+$ gegen Uhrzeigersinn, $-$ im Uhrzeigersinn), bezogen auf den Koordinatenursprung der einzelnen geraden Kurvenabschnitte die Folge: $+-+++--+++$. Aufgrund des wechselnden Umlaufsinnes hat die vor. Fläche zu- und abnehmende Intervalle. Infolgedessen ist die durch die vor. Fläche parametrisierte Darstellung (rechts unten) mehrdeutig.

Im nachfolgenden Beispiel wird der Einfluß von zufälligen Störungen auf die Parameterdarstellung der Kurve demonstriert (Bild 6). Zu diesem Zweck wurde die Originalkurve zunächst äquidistant abgetastet und danach beiden Koordinaten der Abtastpunkte ein zufälliger, jeweils gleichverteilter Fehler überlagert (links oben). Dargestellt sind die

Komponenten u und v als Funktionen der gestörten, auf die (fehlerbehaftete) Periode normierten Parameter. Dabei ist es wesentlich, daß die Betrachtung bezüglich der normierten Parameter erfolgt. Dies soll zunächst begründet werden, wobei etwas vorgegriffen werden muß.

Die parametrisierte Funktion wird später fouriertransformiert. Dabei - siehe Gln. (14) bzw. (15) - geht die Periode an zwei Stellen ein. Zum ersten als Faktor vor dem Integral. Einem Fehler an dieser Stelle entspricht eine Streckung im Musterraum. Bei der nachfolgenden Bildung von Invarianten wird diese gedachte Streckung, also auch der Fehler, wieder eliminiert. Dieser Effekt ist daher unwesentlich. Wesentlich ist die zweite Verwendung unter dem Integral. Dort wird der Parameter t auf die Periode T normiert. Eine einfache Parameterstreckung mit einem konstanten Faktor wird hier durch die Normierung auf die ebenfalls gestreckte Periode eliminiert und ist daher nicht als Fehlerquelle zu betrachten. Hier sind nur Abweichungen von dem proportional gestreckten Parameter - d.h. *nichtlineare Parameterverzerrungen* - Fehler.

Die Parametrisierung durch die Bogenlänge (rechts oben) erweist sich als unempfindlich. Dies ist darauf zurückzuführen, daß der Parameterfehler „im Mittel“ proportional mit dem fehlerfreien Parameter wächst, und die lokalen Abweichungen von dem gestreckten Parameter klein sind.

Bei Parametrisierung durch die abs. Fläche (13) hängt die lokale Empfindlichkeit der parametrisierten Funktion vom Kurvenverlauf ab und kann an verschiedenen Stellen der Kurve sehr unterschiedlich sein. Sie nimmt mit zunehmender Entfernung vom Flächenschwerpunkt zu. Sie nimmt ferner zu mit kleiner werdendem Winkel zwischen dem Fahrstrahl (Flächenschwerpunkt - Kurve) und der Tangente an die (fehlerfreie) Kurve. Decken sich etwa der Fahrstrahl und ein (fehlerfreies) Kurvenstück, dann ist der Parameterzuwachs entlang diesem Stück Null. Die Fehlerkomponente des seitlichen Versatzes von der Kurve hat von Null verschiedene Zuwächse zur Folge, die sich beim Voranschreiten entlang der gestörten Kurve aufsummieren. Im vorliegenden Beispiel etwa ist der durch einen Pfeil markierte Kurvenabschnitt besonders empfindlich. Die unterschiedliche Empfindlichkeit entlang der Kurve hat signifikante nichtlineare Parameterverzerrungen zur Folge.

Sehr viel robuster erweist sich die Parametrisierung durch die vor. Fläche (12). Ihre Empfindlichkeit (rechts unten) ist der bei Parametrisierung durch die Bogenlänge (rechts oben) vergleichbar, jedoch aus einem anderen Grund: Hier gehen die Parameterfehler vorzeichenbehaftet ein und summieren sich daher nicht, wie im vorangegangenen Beispiel, zu einem monoton anwachsenden Fehler auf, sondern haben die Tendenz sich auszugleichen.

In Bild 7 sind die Parameterfehler über den fehlerfreien Parametern aufgetragen. Diese Darstellungen veranschaulichen nochmals die Parameterempfindlichkeiten, wobei die nicht-

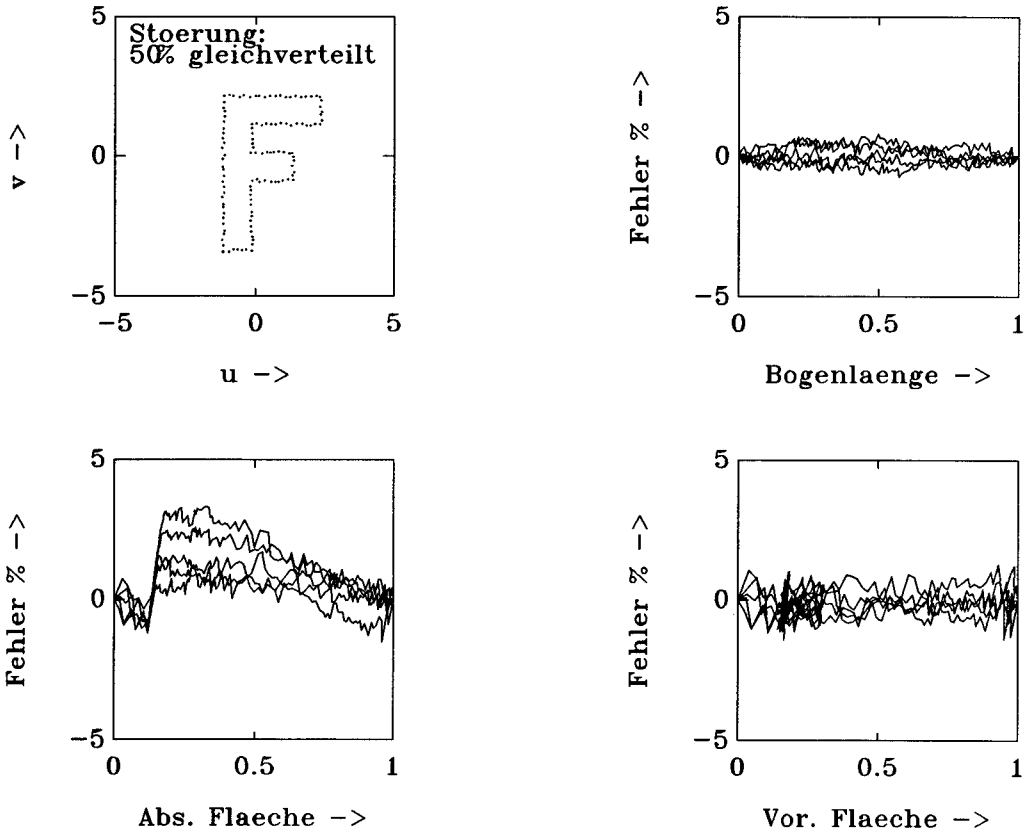

Bild 7: Kurvenparameterfehler unter Konturstörungen in % der Periode

lineare Parameterverzerrung im Fall der abs. Fläche und die qualitativ vergleichbare Empfindlichkeit der Bogenlänge und der vor. Fläche deutlich zum Ausdruck kommen.

3.2 Diskrete Parameterdarstellung durch Fourierdeskriptoren

Durch Anwendung der Fouriertransformation auf die periodische Funktion $x(t)$ wird die unendliche zusammenhängende Punktmenge $\mathcal{C}$ in eine unendliche diskrete Punktmenge mit dem diskreten Parameter k transformiert.

Für $x \in \mathbf{C}$ gilt:

$$C_k = U_k + jV_k = \frac{1}{T}\oint_{\mathcal{C}}(u(t)+jv(t))e^{-j2\pi kt/T}dt, \qquad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \infty, \qquad C_k \in \mathbf{C}^1 \tag{14}$$

und für $x \in \mathbf{R}^2$ gilt:

$$X_k = \begin{pmatrix} U_k \\ V_k \end{pmatrix} = \frac{1}{T}\oint_{\mathcal{C}}\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} e^{-j2\pi kt/T}dt, \qquad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \infty, \qquad X_k \in \mathbf{C}^2. \tag{15}$$

Die Transformierten C_k bzw. X_k sind Beschreibungsgrößen der Kurve $\mathcal{C}$ und werden deren *Fourierdeskriptoren* genannt.

Beziehungen zwischen den Fourierdeskriptoren

Die Funktionen $u(t)$ und $v(t)$ sind reell. Folglich gilt:

$$U_k = U_{-k}^* \quad \text{und} \quad V_k = V_{-k}^*, \quad \text{und daher auch:} \quad X_k = X_{-k}^*. \tag{16}$$

Daraus und aus $C_k = U_k + jV_k$ (14) folgt ferner:

$$U_k = \frac{1}{2}(C_k + C_{-k}^*) \quad \text{und} \quad V_k = \frac{1}{2j}(C_k - C_{-k}^*). \tag{17}$$

Eigenschaften der Fourierdeskriptoren:

Ist $x(t)$ *stetig* und *eindeutig*, dann sind die Fourierdeskriptoren asymptotisch genau umkehrbar und damit eine *vollständige* Beschreibung der Kurve C . Für die Umkehrung gilt:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{j2\pi kt/T}, \quad x \in \mathbf{C} \tag{18}$$

bzw.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi kt/T}, \quad x \in \mathbf{R}^2. \tag{19}$$

Ist die Anzahl der Fourierkoeffizienten auf das Intervall $[-M, M]$ beschränkt, so liegt im allgemeinen eine angenäherte Beschreibung vor, deren Darstellungsfehler mit wachsendem M asymptotisch verschwindet. Die Beträge der Fourierkoeffizienten nähern sich für $k \to \infty$ mit $1/k^2$ oder schneller dem Wert Null [5].

Ist $x(t)$ *unstetig*, dann sind die Fourierdeskriptoren in der Nähe der Unstetigkeitsstelle bei noch so großem aber endlichem M nicht umkehrbar [14]. Der Darstellungsfehler kann durch die Eigenschaft der Reihe, daß sie an der Unstetigkeitsstelle den Mittelwert der Funktionswerte annimmt, und der als Gibbs-Phänomen bekannten Erscheinung erhebliche Werte annehmen. Das (unendliche) Koeffizientensystem ist jedoch *vollständig* in dem Sinne, daß nicht zwei verschiedene Kurven existieren, die in allen Fourierdeskriptoren übereinstimmen. Die Beträge der Fourierkoeffizienten nähern sich für $k \to \infty$ mit $1/k$ dem Wert Null, also langsamer als bei stetigen Funktionen.

Ist $x(t)$ *mehrdeutig*, dann sind die Fourierdeskriptoren nicht umkehrbar. Dies folgt unmittelbar aus der Umkehrformel, die zu jedem t genau ein x liefert.

Beschreibt $x(t)$ eine Kurve, die bei einer Rotation um den Schwerpunkt mit $2\pi/s$ in sich selbst übergeht, dann liegt eine Rotationssymmetrie vom Grad s vor. Von *Null verschiedene* Fourierdeskriptoren können nur im *Indexabstand* s auftreten [6]. Daraus folgt: Sind die Fourierdeskriptoren einer s-fach rotationssymmetrischen Funktion vollständig, dann ist auch die Teilmenge der Fourierdeskriptoren mit den Indizes $q \neq 0, q \pm s, q \pm 2s, \ldots$ vollständig. Hierin ist q der Index eines von Null verschiedenen Fourierdeskriptors.

Beispiele:

In Bild 8 sind Leistungsspektren für jeweils dieselbe Kurve bei zwei unterschiedlichen Parametrisierungen dargestellt. Oben wurde ausgeführt, daß die Parametrisierung der dargestellten Kurve durch die abs. Fläche auf eine „fast unstetige“ Konturbeschreibung führt, während die Parametrisierung durch die Bogenlänge jede Kurve stetig beschreibt. Dieser Unterschied wirkt sich im Leistungsspektrum deutlich auf die Geschwindigkeit, mit der die Einhüllende abfällt (d.h. auf die Bandbreite), aus. Im rechten Teilbild ist die Bandbreite erwartungsgemäß sehr viel größer als im linken. Dementsprechend muß

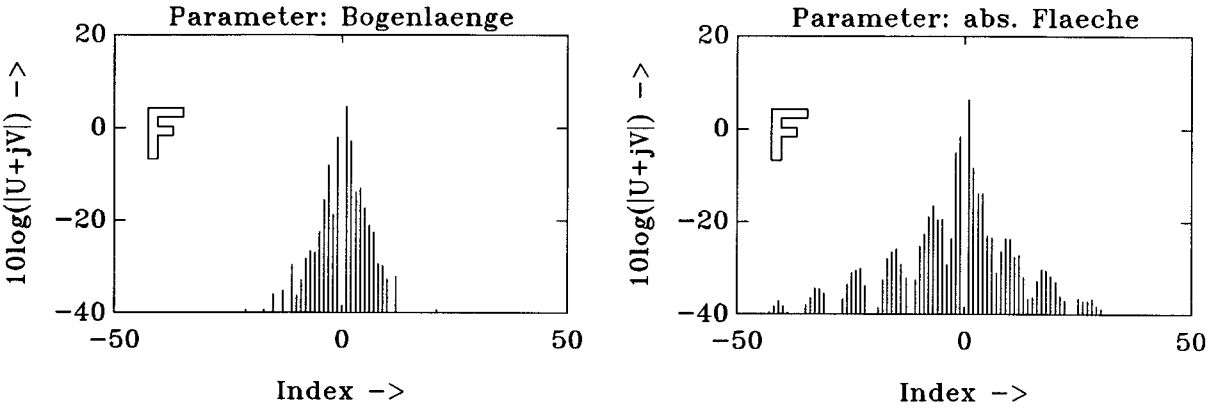

Bild 8: Leistungsspektren für eine Kurve bei zwei verschiedenen Parametrisierungen

auch erwartet werden, daß die Qualität einer beschränkten Zahl von Fourierdeskriptoren zur Darstellung der Kurve erheblich von der Parametrisierung abhängt. In Bild 9 wird dies durch die Rücktransformierten der komplexen Fourierkoeffizienten aus dem Intervall $[-M, M]$ mit $M = 1, 4, 16$ und 64 veranschaulicht. Es ist deutlich zu erkennen, daß bei Parametrisierung durch die abs. Fläche (B) der Darstellungsfehler sehr viel größer ist als bei Parametrisierung durch die Bogenlänge (A), insbesonders in den Bereichen der „fast Unstetigkeit“. Die Parametrisierung durch die vor. Fläche führt, wie oben schon gezeigt, auf Mehrdeutigkeiten im Originalbereich. In diesem Fall sind die Rücktransformierten der Fourierdeskriptoren Kurven (C), die in den Mehrdeutigkeitsbereichen keine Beziehung zum Original mehr erkennen lassen.

Ein weiteres Beispiel soll die Effekte bei unstetig beschriebenen Kurven pointiert zusammenfassen. In Bild 10 ist als Original ein Quadrat dargestellt. Die Eckpunkte erhielten, beginnend mit dem linken unteren, der Reihe nach die Parameterwerte $0, 0, \frac{1}{2}, 1, 1$. Diese Parametrisierung entspricht dem Fall, daß die linke untere Ecke im Koordinatenursprung

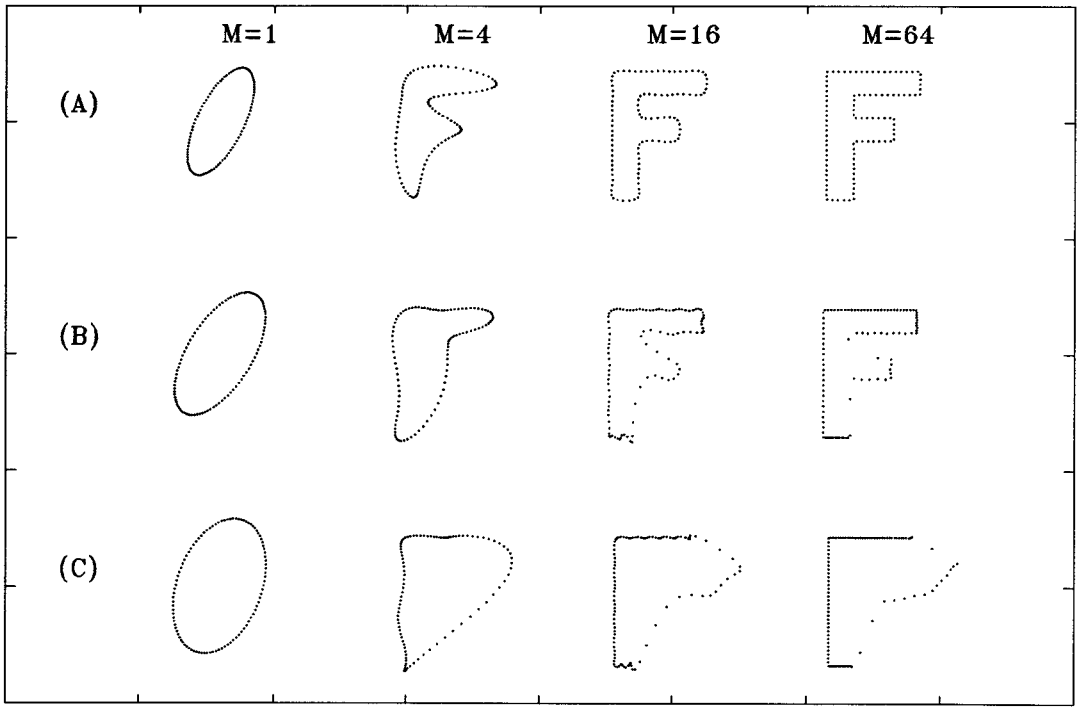

Bild 9: Fourierapproximation einer ebenen Figur bei anfänglicher Parameterdarstellung durch die Bogenlänge (A), die abs. Fläche (B) und die vor. Fläche (C).

liegt und von dieser aus ein Fahrstrahl der Kurve entlanggeführt wird, wobei die überstrichene Fläche den Parameter bildet. Es wird ausdrücklich darauf hingewiesen, daß diese Parametrisierung sich von der oben eingeführten dadurch unterscheidet, daß hier der Koordinatenursprung nicht im Flächenschwerpunkt liegt. Insofern ist das Beispiel konstruiert. Das Beispiel ist trotzdem lehrreich. Es führt auf ein überraschendes Ergebnis, das in der praktischen Anwendung durchaus auftreten kann, nämlich immer dann, wenn der Flächenschwerpunkt auf einen Eckpunkt fällt. Ohne Kenntnis der nachfolgend beschriebenen Interpretationen würde man Gefahr laufen, einen Fehler zu suchen, wo kein Fehler ist.

Aufgrund der gewählten Parametrisierung ändert sich der Parameter nicht, solange der Fahrstrahl der unteren und der linken Seite entlanggeführt wird. Die Parameterdarstellung der Kurve ist also für diese Seiten unstetig. Die Rücktransformierte der Fourierdeskriptoren weicht erheblich vom Original ab, wobei die charakteristischen Abweichungen bei keinem noch so großem M vermieden werden können. In der Umgebung der linken oberen und der rechten unteren Ecke ist das Gibbs-Phänomen zu beobachten. Ferner kreuzt die Rücktransformierte die „Mitten“ der Unstetigkeitsstellen. Die gemeinsame Mitte der unteren und der linken Seite ist der *Mittelpunkt* des Quadrats. Bekanntlich

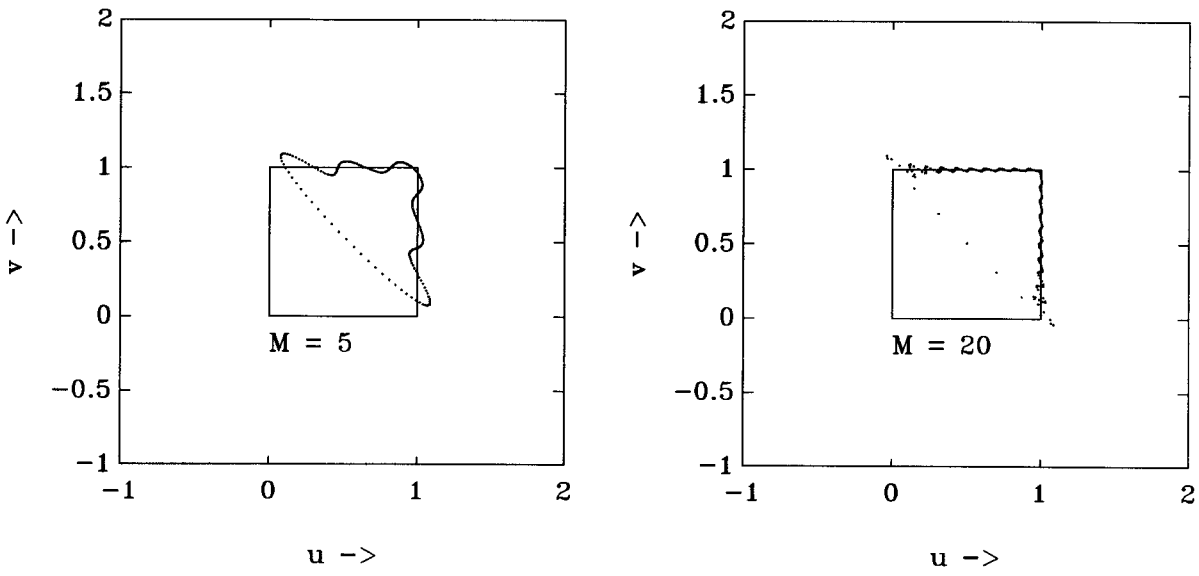

Bild 10: Fourierapproximation eines unstetig beschriebene Quadrats

approximiert die abgebrochene Fourierreihe eine Funktion optimal im Sinne des mittleren quadratischen Fehlers. Auf den ersten Blick scheint in diesem Beispiel diese Eigenschaft nicht vorzuliegen. Dies trügt jedoch. Der mittlere quadratische Fehler ist ein integrales Maß. Man beachte, daß beim Durchlaufen der linken und der unteren Seite der Parameter sich nicht ändert, so daß Fehler in diesen Bereichen nicht zum mittleren quadratischen Fehler beitragen. An dieser Stelle wird noch einmal an das vorangegangene Beispiel mit der Kontur des Buchstabens „F“ erinnert. Bei diesem liegt der Flächenschwerpunkt fast auf einem der Eckpunkte (siehe Bild 5). Die Rücktransformierten der Fourierdeskriptoren (siehe Bild 9 (B)) weisen an dieser Stelle einen besonders großen Fehler auf.

Schließlich sei noch bemerkt, daß im Rahmen dieser Arbeit die Qualität der Fourierdeskriptoren bezüglich des Darstellungsfehlers von untergeordnetem Interesse ist. Hierzu wird auf die Arbeit von Persoon und Fu [28] verwiesen, in der die optimale Parametrisierung bezüglich minimaler Bandbreite behandelt wird. Bezüglich der Bildung von Invarianten ist die Eigenschaft der Vollständigkeit vorrangig. Diese wird jedoch durch Unstetigkeiten nicht berührt.

3.3 Ergänzungen für offene Kurven

Bisher wurden geschlossene Kurven vorausgesetzt. Damit konnten die Kurven auf natürliche Weise durch periodische Funktionen dargestellt werden. Die Periodizität der Parameterdarstellung ist eine notwendige Voraussetzung für die Äquivalenz der Konturbeschreibungen im Originalraum und im Raum der Fourierdeskriptoren. Gelingt es jedoch, offene

Kurven durch periodische Funktionen zulässiger Parameter zu beschreiben, dann kann die ursprüngliche Voraussetzung entfallen, und es können offene Kurven wie geschlossene behandelt werden. Dazu werden nachfolgend zwei Verfahren angegeben. Diese unterscheiden sich prinzipiell dadurch, daß beim ersten die offene Kurve im Endlichen fortgesetzt wird, während dem zweiten eine Fortsetzung ins Unendliche zugrunde liegt (siehe Bild 11).

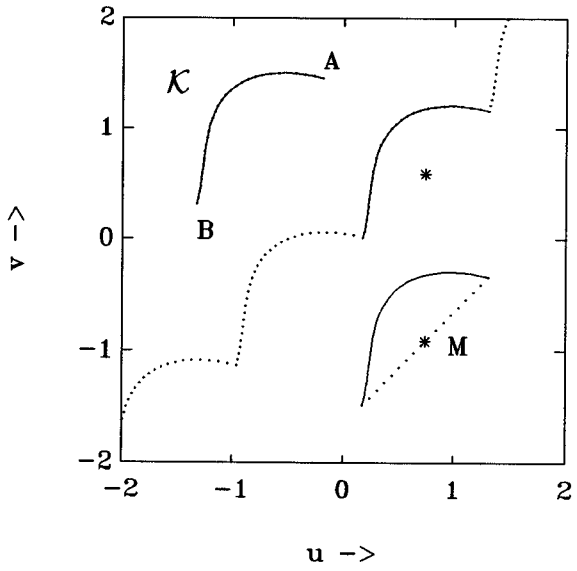

Bild 11: Zur Darstellung offener Kurven durch periodische Funktionen

Es sei $\mathcal{K}$ eine *einfache offene* Kurve mit den Endpunkten A und B: $x_A \neq x_B$. Ferner sei $\mathcal{K}$ ein affines Bild der Referenzkurve $\mathcal{K}^0$.

1) Man erhält aus den offenen Kurven $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}^0$ ein affines Paar geschlossener Kurven $\mathcal{C}'$ und $\mathcal{C}^{0\prime}$, indem man die Endpunkte durch Geraden verbindet. Die affinen Transformationen bilden Geraden auf Geraden ab. Ferner sind die Endpunkte von $\mathcal{K}$ affine Bilder der Endpunkte von $\mathcal{K}^0$. Also ist $\mathcal{C}'$ ein affines Bild von $\mathcal{C}^{0\prime}$, und zwar unter derselben Transformation, die $\mathcal{K}^0$ auf $\mathcal{K}$ abbildet. Nun ist zwischen geschlossenen Kurven gleicher Gestalt, von denen die eine a priori geschlossen war und die andere nachträglich geschlossen wurde, zu unterscheiden. Bei a priori geschlossenen Kurven wurde der Parametrisierung eine Koordinatentransformation in den Flächenschwerpunkt zugrunde gelegt. Für jeden anderen Bezugspunkt erhält man eine andere Parameterskala. Die affinen Transformationen bilden Mittelpunkte von Strecken aufeinander ab. Also erhält man zulässige Parameterdarstellungen für $\mathcal{C}'$, indem man in Satz 1 x_S durch x_M mit

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

ersetzt. Durch den Mittelpunkt M ist auf natürliche Weise ein Aufpunkt auf C' definiert. Damit entfällt der Freiheitsgrad der Aufpunktsverschiebung und somit auch der diesbezügliche Normierungsaufwand. Eine Beschränkung dieses Verfahrens besteht darin, daß der Mittelpunkt M und der Flächenschwerpunkt S zusammenfallen können, d.h., daß es dann auf gleiche Parameterdarstellungen für C' und C führt. Das nachfolgend beschriebene Verfahren unterliegt dieser Beschränkung *nicht.*

2) Man stelle sich eine unendliche Anzahl von Reproduktionen der offenen Kurve $\mathcal{K}$ als Glieder einer ins Unendliche ausgedehnten, gestreckten „Kette" vor (siehe Bild 11). Es sei $x(\xi) : 0 \leq \xi \leq \Xi$ irgendeine Parameterdarstellung der offenen Kurve $\mathcal{K}$. Die Kette wird dann beschrieben durch

$$x(\xi + n\Xi) = x(\xi) + n(x(\Xi) - x(0)), \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Für die erste Ableitung gilt:

$$\frac{d}{d\xi} x(\xi + n\Xi) = \frac{d}{d\xi} x(\xi),$$

sofern sie existiert. Sie ist periodisch bei beliebiger Parameterskala ξ und erfüllt damit eine notwendige Voraussetzung bezüglich umkehrbar eindeutiger Darstellung durch Fourierdeskriptoren. Ein Beispiel dazu findet man am Ende des Abschnitts. Unter den affinen Transformationen

$$x(\xi(\eta)) = Ax^0(\eta) + x_0$$

gilt:

$$\frac{dx}{d\xi}\frac{d\xi}{d\eta} = A\frac{dx^0}{d\eta}.$$

Ersetzt man ξ und η durch zulässige Parameter t und t^0 dann folgt:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{A}{\mu}\frac{dx^0}{dt^0}, \qquad \mu = |A| \quad bzw. \quad ||A||.$$

Die ersten Ableitungen nach zulässigen Parametern sind demnach äquivalent unter den affinen Transformationen und periodisch. Sie können daher wie zulässige Parameterdarstellungen geschlossener Kurven behandelt werden. Im Gegensatz zu dem zuerst beschriebenen Verfahren wird hier die Gestalt der offenen Kurve $\mathcal{K}$ nicht verändert. Eine Konfliktsituation bezüglich der Unterscheidung zwischen a priori geschlossenen und offenen Kurven tritt daher nicht auf, was als Vorteil zu werten ist. Ein Nachteil des Verfahrens ist, daß es die Berechnung der ersten Ableitung erfordert und daher gegenüber Störungen empfindlicher ist. Ferner ist seine Verwendbarkeit auf stetige Funktionen beschränkt. Eine Spezialisierung des Verfahrens auf äquidistant abgetastete Kurven findet man in [36].

Schlußfolgerung:

Es wurden zwei Möglichkeiten zur Parameterdarstellung offener Kurven durch periodische Funktionen zulässiger Parameter aufgezeigt. Beide unterliegen gewissen Beschränkungen. Daher werden der weiteren Abhandlung wieder geschlossene Kurven zugrunde gelegt.

Beispiel: Zur Darstellung offener Kurven durch Fourierdeskriptoren

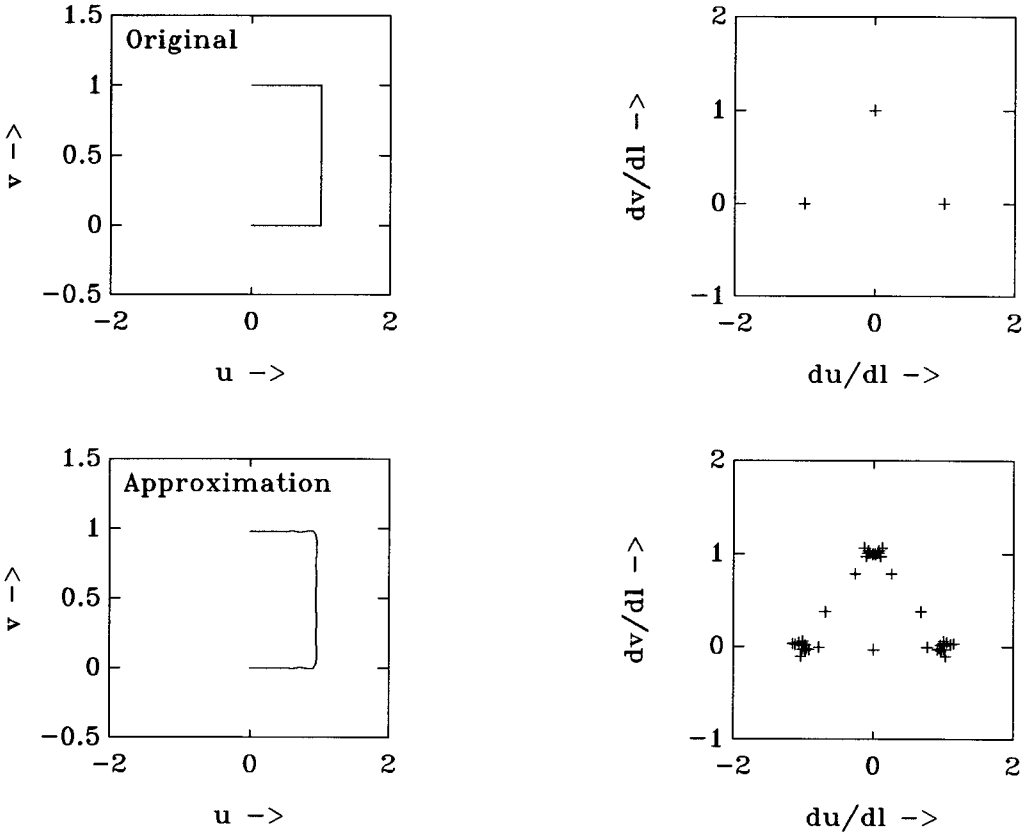

Bild 12: Fourierapproximation einer offenen Kurve (Original nach [36])

Im linken oberen Teilbild von Bild 12 ist das Original einer offenen Kurve dargestellt. Diese wurde durch die Bogenlänge, beginnend beim unteren Endpunkt, parametrisiert. Die Kurve hat drei verschiedene Ableitungen nach der Bogenlänge (rechts oben). Das Ergebnis der Fourier-Hin-und-Rücktransformation ($M = 10$) der Ableitungen ist rechts unten dargestellt. Man erkennt Häufungen in der Umgebung der Stellen, die durch die Ableitungen des Originals markiert sind. Durch Integration ergibt sich die im linken unteren Teilbild dargestellte Kurve, die den Kurvenverlauf des Originals, trotz Verwendung von nur wenigen Fourierkoeffizienten, gut wiedergibt.

Zur Berechnung dieses Beispiels wurde ein Programm, entsprechend Kapitel 8, verwendet. Die Fourieranalyse wurde über den folgenden Eingangsdaten ausgeführt:

du/dt	1	1	0	0	−1	−1	1
dv/dt	0	0	1	1	0	0	0
t	0	1	1	2	2	3	3

Dieser Datensatz beschreibt die Ableitung der Originalfunktion exakt, einschließlich der unterlegten periodischen Fortsetzung (letzte Spalte).

3.4 Fourierdeskriptoren affiner Konturen - Die Gruppe G_{AZ}

Es seien $x(t)$ und $x^0(t^0)$ Parameterdarstellungen zweier affiner Konturen $\mathcal{C} \sim \mathcal{C}^0$ mit der Parametrisierung nach (12) oder (13). Ferner seien X_k, X_k^0 deren Fourierdeskriptoren für $x, x^0 \in \mathbf{R}^2$, und C_k, C_k^0 für $x, x^0 \in \mathbf{C}$ (siehe Abschnitt 3.2).

Es gilt:

$$\begin{aligned} x(t(t^0)) &= Ax^0(t^0) + x_0, && \text{für} \quad x, x^0 \in \mathbf{R}^2 \\ x(t(t^0)) &= ax^0(t^0) + bx^{0*}(t^0) + c, && \text{für} \quad x, x^0 \in \mathbf{C} \end{aligned}$$

jeweils mit:

$$t(t^0) = \mu(t^0 + \tau), \qquad \mu, \tau \in \mathbf{R}.$$

Sowohl die *affine Abbildung* als auch die *Parametertransformation unter der affinen Abbildung* sind *linear*. Durch Anwendung des Superpositions- und des Verschiebungssatzes der Fouriertransformation (siehe Anhang A) folgt:

$$X_k = z^k A X_k^0, \qquad k \neq 0, \tag{20}$$

$$C_k = z^k (aC_k^0 + bC_{-k}^{0*}), \qquad k \neq 0, \tag{21}$$

jeweils mit:

$$z = e^{-j2\pi\tau/T^0}. \tag{22}$$

Für die *0-ten* Fourierdeskriptoren gilt ferner:

$$X_0 = AX_0^0 + b, \tag{23}$$

$$C_0 = aC_0^0 + bC_0^{0*} + c. \tag{24}$$

An dieser Stelle werden die beiden Forderungen an das Differential des Parameters (Abschnitt 3.1) wirksam. Wegen der ersten können die Fourierdeskriptoren, ausgehend von beliebigen ursprünglichen Parameterdarstellungen, unabhängig voneinander bestimmt

werden und stehen wegen der zweiten schließlich ebenfalls in einem linearen Zusammenhang, sofern die Konturen affin sind. Würde etwa die Bogenlänge als Parameter benutzt werden, so würde deren Verzerrung unter der affinen Abbildung die Linearität im Raum der Fourierdeskriptoren „stören“.

Die Translation wirkt sich nur auf den *0-ten* Fourierdeskriptor aus, alle übrigen sind *translationsinvariant.* Somit sind $\{X_k : k = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm\infty\}$ bzw. $\{C_k : k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty\}$ *vollständige* Systeme verschiebungsinvarianter Fourierdeskriptoren. Aus diesem Grund bleibt der *0-te* Fourierdeskriptor fortan unberücksichtigt.

Von der affinen Abbildung verbleiben vier reelle Freiheitsgrade in der Matrix A, bzw. die beiden komplexen Freiheitsgrade a und b. Der Term z^k berücksichtigt eine eventuelle Aufpunktsverschiebung bei der Parametrisierung und hat den zusätzlichen reellen Freiheitsgrad τ. Das Problem des Bildung von affininvarianten Fourierdeskriptoren besteht nun im Auffinden von Transformationen, die, angewandt auf die Fourierdeskriptoren affiner Konturen, zum selben Ergebnis führen und dabei die in den Fourierdeskriptoren enthaltene Gestaltsinformation, soweit sie die Zugehörigkeit zu einer Äquivalenzklasse betrifft, möglichst unberührt lassen.

Für jedes $k \neq 0$ bildet die Gesamtheit der Abbildungen nach (20) bzw. (21) eine Gruppe, die Gruppe G_{AZ} . Diese enthält die affine Gruppe G_A und die Gruppe der Aufpunktsverschiebungen G_Z als Untergruppen.

Nachfolgend wird die Bildung von Invarianten unter G_A und G_Z zunächst getrennt behandelt. Die Ergebnisse werden anschließend zur Bildung von Invarianten unter G_{AZ} , den *affininvarianten Fourierdeskriptoren*, kombiniert.

4 Invariantensysteme unter der Gruppe G_A

Für die Gruppe G_A der affinen Transformationen gilt laut Gleichung (20) bzw. (21):

$$\begin{aligned} X_k &= \quad AX_k^0, & k \neq 0, \\ C_k &= \; aC_k^0 + bC_{-k}^{0*}, & k \neq 0. \end{aligned}$$

Die Separation der Transformationsparameter wird hier wieder genauso vorgenommen, wie bei der Parametrisierung, nämlich unter Anwendung des *Außenprodukts.* Aus jedem Paar zweier Fourierdeskriptoren lassen sich die folgenden Außenprodukte bilden:

$$[X_k, X_p], \quad [X_k, X_p^*], \quad [X_k^*, X_p] \quad \text{und} \quad [X_k^*, X_p^*], \qquad k, p \neq 0.$$

Betrachtet man die Gesamtheit der Indizes $k, p = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty$, so erhält man vier äquivalente Systeme, die sich nur durch die Anordnung ihrer Elemente unterscheiden. Dies folgt aus der Symmetrieeigenschaft der Fourierkoeffizienten reeller Funktionen (16). Nur aus formalen Gründen wird nachfolgend das zweite bevorzugt.

Satz 2 : A-Invarianten
Die Außenprodukte

$$D_{k,p} = [X_k, X_p^*] = \begin{vmatrix} U_k & U_p^* \\ V_k & V_p^* \end{vmatrix} = U_k V_p^* - V_k U_p^*, \qquad k, p = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty, \tag{25}$$

bilden ein (relatives) Invariantensystem unter G_A mit ∞^2 Elementen. Die Elemente heißen der Kürze halber A-Invarianten.

Ferner ist jedes

$$\Delta_{k,p} = C_k C_p^* - C_{-k}^* C_{-p}, \quad k, p \neq 0 \tag{26}$$

eine A-Invariante, die sich von $D_{k,p}$ lediglich um einen konstanten Faktor unterscheidet. Es gilt:

$$\Delta_{k,p} = (-2j) \quad D_{k,p}.$$

Beweis: zu(25)

Es sei $\mathcal{C} \sim \mathcal{C}^0$. Dann gilt für jedes Paar zweier Fourierdeskriptoren $X_k, X_p : k, p \neq 0$ mit (20) die Matrix-Gleichung

$$\begin{pmatrix} U_k & U_p^* \\ V_k & V_p^* \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} U_k^0 & U_p^{0*} \\ V_k^0 & V_p^{0*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^k & 0 \\ 0 & z^{p*} \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Durch Anwendung des *Determinanten-Produktsatzes* folgt daraus

$$U_k V_p^* - V_k U_p^* = \mid A \mid \quad (U_k^0 V_p^{0*} - V_k^0 U_p^{0*}) \quad z^{k-p}, \tag{28}$$

und mit der Abkürzung nach (25)

$$D_{k,p} = \mid A \mid \quad D^0_{k,p} \quad z^{k-p}, \qquad \textbf{q.e.d.}\,. \tag{29}$$

Die linke Seite der Gleichung unterscheidet sich von der rechten bezüglich der Freiheitsgrade der affinen Abbildungen nur um den konstanten Faktor $\mid A \mid$, unabhängig von den Indizes k und p. Somit sind die $D_{k,p}$ (relative) A-Invarianten.

Beweis: zu(26)

Durch einfaches Einsetzen von (21) in (26) erhält man:

$$C_k C_p^* - C_{-k}^* C_{-p} = (aa^* - bb^*) \quad (C_k^0 C_p^{0*} - C_{-k}^{0*} C_{-p}^0) \quad z^{k-p}, \tag{30}$$

und mit (8) und (26) ebenfalls:

$$\Delta_{k,p} = \mid A \mid \quad \Delta^0_{k,p} \quad z^{k-p}, \qquad \textbf{q.e.d.}\,. \tag{31}$$

4.1 Minimale vollständige A-Invariantensysteme

Die Menge der ∞^2 A-Invarianten nach Kapitel 4 ist in hohem Maße redundant. Nachfolgend wird eine ∞^1 Teilmenge aus dieser untersucht, die sich dadurch ergibt, daß einer der beiden Indizes, hier der Index p, als fest angenommen wird.

Satz 3 A-Invarianten
Voraussetzung: $p \in \{\pm 1, \pm 2, \ldots \pm \infty | U_p V_p^* - V_p U_p^* \neq 0 \quad bzw. \quad C_p C_p^* - C_{-p}^* C_{-p} \neq 0\}$
Die Folgen der ∞^1 *A-Invarianten*

$$D_k = \quad U_k V_p^* - V_k U_p^*, \qquad k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty \tag{32}$$

$$\Delta_k = \quad C_k C_p^* - C_{-k}^* C_{-p}, \qquad k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty \tag{33}$$

sind jeweils ein vollständiges *und* minimales *Invariantensystem unter* G_A .

Beweis:

Beide Invariantensysteme unterscheiden sich nur um einen konstanten Faktor. Der Beweis wird daher nur für eines geführt. Für $p = konst$ gilt:

$$\Delta_k = a' C_k + b' C_{-k}^*$$

mit

$$a' = C_p^* \quad \text{und} \quad b' = -C_{-p}.$$

Die Normierung beinhaltet somit lediglich eine affine Transformation im Spektralraum (21) falls, der Voraussetzung entsprechend, $a'a'^* - b'b'^* \neq 0$ gilt. Somit bleiben alle Eigenschaften der Fourierdeskriptoren hinsichtlich der *Vollständigkeit* und der *Minimalität* erhalten. Sind die Fourierdeskriptoren umkehrbar, dann ergibt die Fouriersynthese der A-Invarianten einer Kontur $\mathcal{C}$ ein affines Bild $\mathcal{C}'$ von $\mathcal{C}$. Zusammenfassend folgt: Hinsichtlich der Signalstruktur sind die A-Invarianten den Fourierdeskriptoren gleichwertig.

Zur Voraussetzung von Satz 3

Es gilt: $C_pC_p^* - C_{-p}^*C_{-p} = (-2j)(U_pV_p^* - V_pU_p^*)$, d.h. beide Teile der Voraussetzung sind gleichwertig. Es reicht daher aus, nur einen von beiden zu betrachten. Die Voraussetzung wird dann, und nur dann, verletzt, wenn U_p und V_p gleichphasig sind, wenn also eine *reelle* Konstante c existiert, mit der gilt: $U_p = cV_p$. Gilt diese Beziehung für alle $p \in \{\pm 1, \pm 2, \ldots \pm\infty\}$, dann gilt auch $u(t) = cv(t)$. Diese Gleichung beschreibt für $0 \leq t \leq T$ ein Geradenstück. Randlinien von Zusammenhangsgebieten (Konturen) können niemals nur aus einem Geradenstück bestehen. Also existiert für jede Kontur ein Index p, der die Voraussetzung erfüllt.

4.2 Nicht vollständige A-Invariantensysteme

Satz 4 *Jedes der vier folgenden Systeme*

$$\begin{aligned} D_{k,k} &= U_kV_k^* - V_kU_k^* &&, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty, \\ \Delta_{k,k} &= C_kC_k^* - C_{-k}^*C_{-k} &&, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D'_{k,p} &= \mid U_kV_p^* - V_kU_p^* \mid &&, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty, \; p = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty, \\ \Delta'_{k,p} &= \mid C_kC_p^* - C_{-k}^*C_{-p} \mid &&, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty, \; p = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty, \end{aligned}$$

ist ein (relatives) Invariantensystem unter G_{AZ} . *Die Invariantensysteme sind* nicht vollständig.

Beweis: Invarianz unter G_{AZ}

Es gilt: $z^0 = 1$ und $\mid z \mid = 1$. Aus (29) und (31) folgt:

$$D_{k,k} = \mid A \mid D_{k,k}^0 \quad \text{und} \quad D'_{k,p} = \mid\mid A \mid\mid\mid D_{k,p}^0 \mid, \quad \textbf{q.e.d.}, \tag{34}$$

$$\Delta_{k,k} = \mid A \mid \Delta_{k,k}^0 \quad \text{und} \quad \Delta'_{k,p} = \mid\mid A \mid\mid\mid \Delta_{k,p}^0 \mid, \quad \textbf{q.e.d.}\,. \tag{35}$$

$D_{k,k}$ ist imaginär, alle übrigen sind reell. Allen vier Systemen ist gemeinsam, daß sie die Phaseninformation der Fourierdeskriptoren eliminieren. Daher bezeichnet jedes der vier Invariantensysteme unendlich viele Kurven und ist deshalb *nicht vollständig.*

Anmerkung

Diese Invariantensysteme sind zwar nicht vollständig, da ihnen die Phaseninformation fehlt. Aus demselben Grunde sind sie jedoch robust gegenüber Fehlereinflüssen. Wegen der informationsverdichtenden Eigenschaft der Fouriertransformation sind sie überdies selektiv. Beide Eigenschaften wurden in einer Anzahl von Laborexperimenten bestätigt.

4.3 Absolute A-Invarianten

Es sei I irgendeines der oben angegebenen A-Invariantensysteme und $\mathcal{C} \sim \mathcal{C}^0$. Dann gilt entweder $I = \mid A \mid I^0$ oder $I = - \mid A \mid I^0$. Zur Bildung absoluter A-Invarianten sind die relativen lediglich so zu normieren, daß sich $\mid A \mid$ kürzt. Dies kann

- entweder durch Normierung auf irgendeine, nicht verschwindende, relative A-Invariante
- oder durch Normierung auf die Periode T

geschehen. Da schon in Satz 3 $D_p \neq 0$ bzw. $\Delta_p \neq 0$ vorausgesetzt wurde, nehmen diese unter den A-Invarianten eine Vorzugsstellung ein. Die Periode T kann definitionsgemäß nicht verschwinden.

Satz 5 : Absolute A-Invarianten
Voraussetzung: $p \in \{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty | U_p V_p^* - V_p U_p^* \neq 0 \quad bzw. \quad C_p C_p^* - C_{-p}^* C_{-p} \neq 0\}$

Die Folgen

$$\frac{U_k V_p^* - V_k U_p^*}{U_p V_p^* - V_p U_p^*} = \frac{C_k C_p^* - C_{-k}^* C_{-p}}{C_p C_p^* - C_{-p}^* C_{-p}}, \qquad k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty, \tag{36}$$

$$\frac{1}{T}(U_k V_p^* - V_k U_p^*), \qquad k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty, \tag{37}$$

$$\frac{1}{T}(C_k C_p^* - C_{-k}^* C_{-p}), \qquad k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty. \tag{38}$$

sind jeweils ein absolutes, vollständiges *und* minimales *Invariantensystem unter* G_A . *Sind die Fourierdeskriptoren umkehrbar, dann sind auch die Invarianten umkehrbar auf eine normierte Darstellung bezüglich der Freiheitsgrade der affinen Abbildungen.*

Bezeichnet man die Invarianten eines dieser Systeme mit Q_k, dann gilt sowohl

$$Q_k = Q_k^0 z^{k-p} \quad \text{falls} \quad \mathcal{C} \sim \mathcal{C}^0 \tag{39}$$

als auch die Umkehrung

$$\mathcal{C} \sim \mathcal{C}^0 \quad \text{falls} \quad \forall k \neq 0 : Q_k = Q_k^0 z^{k-p}. \tag{40}$$

Dieselben Normierungen, angewandt auf die Invarianten nach Abschnitt 4.2, führen auf *absolute, nicht vollständige* Invariantensysteme unter G_{AZ} . Bezeichnet man die Invarianten eines dieser Systeme mit R_k, dann gilt:

$$R_k = R_k^0 \quad \text{falls} \quad \mathcal{C} \sim \mathcal{C}^0,$$

jedoch nicht der Umkehrschluß.

Beispiel: Erhaltung der Signalstruktur

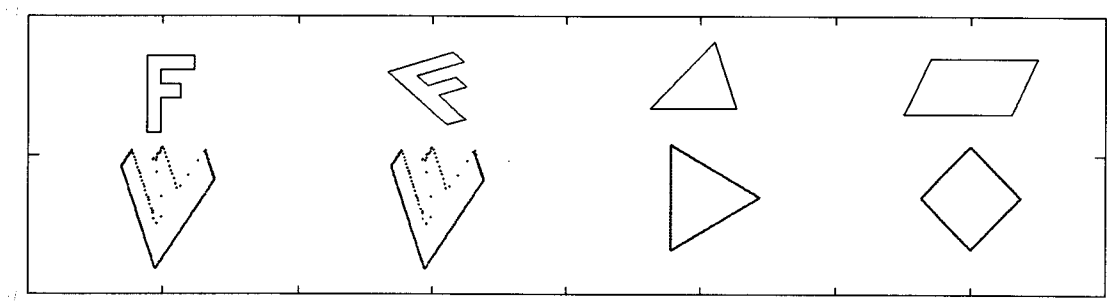

Bild 13: Konturen im Original (oben) und nach Anwendung der Fouriersynthese auf deren A-Invarianten (unten)

In Bild 13 sind oben vier verschiedene Konturen dargestellt. Von diesen wurden zunächst vollständige und absolute A-Invarianten berechnet und diese mittels Fouriersynthese (18) rücktransformiert. Die synthetisch gewonnenen Konturen (unten) sind, bis auf den Darstellungsfehler durch Abbruch der Fourierreihe, affine Bilder der Originale. Durch diese wird veranschaulicht, daß die vollständigen A-Invarianten die in den Fourierdeskriptoren enthaltene Signalstruktur (Gestaltsinformation), soweit sie für die Zugehörigkeit zu einer Äquivalenzklasse relevant ist, nicht verändern. Die beiden ersten „F"-förmigen Konturen sind affin. Somit sind ihre A-Invarianten und deren Inverse gleich. Bemerkenswert ist die Eigenschaft der „Symmetrierung" durch die A-Invarianten, die in allen vier Fällen, besonders jedoch bei den beiden geometrischen Figuren Dreieck und Parallelogramm, zu beobachten ist.

4.4 Invariantensysteme unter Untergruppen der affinen Gruppe

Für die Bildung von Invarianten unter der Ähnlichkeitsgruppe, der Kongruenzgruppe und der Gruppe der Parallelverschiebung eignet sich die Parametrisierung durch die Bogenlänge in besonderer Weise. Sie ist *parameterinvariant*, wird unter diesen Gruppen *linear transformiert* und führt garantiert auf *stetige* und *eindeutige* Konturbeschreibungen.

Für die Fourierdeskriptoren $C_k : k \neq 0$ gilt:

$$C_k = z^k \mid a \mid e^{j\varphi} C_k^0 \quad : \text{Ähnlichkeitsgruppe,} \tag{41}$$

$$C_k = z^k e^{j\varphi} C_k^0 \quad : \text{Kongruenzgruppe,} \tag{42}$$

$$C_k = z^k C_k^0 \quad : \text{Parallelverschiebungen.} \tag{43}$$

Satz 6 :
Voraussetzung: $p \in \{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty | C_p \neq 0\}$

Die Folgen:

$$C_k/C_p \quad : k \in \{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty\} \quad : \textit{Ähnlichkeitsgruppe,} \tag{44}$$

$$C_k C_p^* \quad : k \in \{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty\} \quad : \textit{Kongruenzgruppe,} \tag{45}$$

$$C_k \quad : k \in \{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty\} \quad : \textit{Parallelverschiebungen.} \tag{46}$$

sind umkehrbare, vollständige, absolute *und* minimale *Invariantensysteme unter der jeweiligen Gruppe. Sie sind außerdem* gruppenspezifisch, *d.h. nicht gleichzeitig Invariantensysteme unter einer Obergruppe.*

Die Umkehrbarkeit, die Vollständigkeit und die Minimalität folgen unmittelbar daraus, daß die Fourierdeskriptoren diese Eigenschaften besitzen und die Invarianten zu den Fourierdeskriptoren proportional sind.

Bezeichnet man die Invarianten unter der Kongruenz- und der Ähnlichkeitsgruppe wieder einheitlich mit Q_k, dann gilt:

$$Q_k = z^{k-p} Q_k^0 \quad : k \in \{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty\} \quad : \text{Ähnlichkeitsgruppe,} \tag{47}$$

$$Q_k = z^{k-p} Q_k^0 \quad : k \in \{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty\} \quad : \text{Kongruenzgruppe,} \tag{48}$$

$$C_k = z^k C_k^0 \quad : k \in \{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty\} \quad : \text{Parallelverschiebungen,} \tag{49}$$

was man durch einfaches Einsetzen unmittelbar erhält. Diese Gleichungen zeigen zum einen die Invarianzeigenschaft, zum anderen aber auch, daß das Problem der „Aufpunktnormierung“ unter der affinen Gruppe und deren Untergruppen grundsätzlich von gleicher Art ist.

5 Invariantensysteme unter der Gruppe G_Z

Für die Gruppe G_Z der Aufpunktsverschiebungen gilt:

$$C_k = z^k C_k^0, \qquad | z |= 1. \tag{50}$$

Offensichtlich sind die Betragsquadrate $C_k C_k^*$ Invarianten unter G_Z , kurz *Z-Invarianten.* Dabei handelt es sich, wie nachfolgend gezeigt wird, um den einfachsten Sonderfall eines Produkts aus $n+1$ Faktoren. Die Betragsquadrate eliminieren die Phaseninformation und sind daher unendlich-deutig. Nachfolgend werden Normierungen mit minimalem Phasenverlust entwickelt. Zunächst sei jedoch die grundlegende Idee skizziert. Bildet man aus einer gewissen Anzahl von Fourierdeskriptoren ein Produkt und setzt in dieses die Gleichung (50) ein, so erscheint im Exponenten von z die Summe der im Produkt vorkommenden Indizes. Ist diese Summe Null, dann ist das Produkt Z-invariant. Im allgemeinen ist die Summe nicht Null. Für einen gegebenen Indexsatz erreicht man Z-Invarianz, indem man das Produkt so bildet, daß im Exponenten von z eine *gewichtete* Summe erscheint, und indem man die Gewichte λ_i so wählt, daß der Exponent von z verschwindet. Der allgemeine Ansatz dafür ist ein Produkt aus Potenzen von Fourierdeskriptoren.

Satz 7 :

Voraussetung: $\exists\{k_0, k_1, k_2, \ldots, k_n\}: \quad | C_{k_i} |\neq 0.$

Das Potenzprodukt

$$P = \prod_{i=0}^{n} C_{k_i}^{(*)\lambda_i}, \tag{51}$$

in dem die Exponenten λ_i die diophantische Gleichung

$$\sum_{i=0}^{n} \overset{+}{(-)} \lambda_i k_i = 0, \qquad \lambda_i \in \mathbf{Z}\backslash 0 \tag{52}$$

erfüllen, ist Z-invariant.

Das negative Vorzeichen $(-)$ gilt für konjugiert komplexe Faktoren $(*)$ im Potenzprodukt. $\mathbf{Z}\backslash 0$ ist die Menge der ganzen Zahlen mit Ausnahme der Null. Die Zahl n wird nachfolgend *Ordnung* des Potenzproduktes genannt.

Die Forderung nach ganzzahligen Exponenten λ_i garantiert die Eindeutigkeit des Potenzproduktes. Der Beweis wird unten geführt. Zunächst soll erläutert werden, warum *zusätzlich* Eindeutigkeit verlangt wird. Dazu nehme man an, daß das Potenzprodukt N Lösungen habe. Dann erhält man aus den C_k und C_k^0 die Lösungsmengen $L = \{P_1, P_2, \ldots, P_N\}$

und $L^0 = \{P_1^0, P_2^0, \ldots, P_N^0\}$. In welcher Reihenfolge die Lösungen anfallen ist unbestimmt. Soll nun geprüft werden, ob eine der Lösungen aus L mit einer der Lösungen aus L^0 übereinstimmt, dann sind bis zu N Vergleiche erforderlich. Der Aufwand ist am geringsten, wenn $N = 1$ ist, d.h. wenn nur eine Lösung existiert.

Beweis: Eindeutigkeit

Zunächst wird bewiesen, daß das Produkt (51) *eindeutig* ist. Zum Beweis werden gebrochen rationale teilerfremde Exponenten

$$\lambda_i = \frac{p_i}{s_i}$$

angenommen. Dann ist jeder Faktor phasenmehrdeutig [1] $modulo_{2\pi/s_i}$. Ist s das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) der s_i:

$$s = kgV(s_1, s_2, \ldots, s_n),$$

dann ist das Potenzprodukt phasenmehrdeutig $modulo_{2\pi/s}$, d.h. s-deutig im Phasenintervall $[0, 2\pi)$ und *eindeutig* nur für $\mid s \mid = 1$. Aus $\mid s \mid = 1$ folgt: $\mid s_i \mid = 1$, d.h. $\lambda_i \in \mathbf{Z}\backslash 0$, **q.e.d.** .

Beweis: Invarianz

Alle λ_i werden als ganzzahlig angenommen. Es gilt:

$$\begin{aligned} P &= \prod_{i=0}^{n} [z^{k_i} C_{k_i}^0]^{(*)\lambda_i}, \\ &= \prod_{i=0}^{n} z^{(*)\lambda_i k_i} \quad \prod_{i=0}^{n} C_{k_i}^{0(*)\lambda_i}, \text{alle Faktoren sind eindeutig !} \\ &= z^{\sum_{i=0}^{n} \overset{+}{(-)} \lambda_i k_i} \quad P^0 \\ &= P^0 \iff \sum_{i=0}^{n} \overset{+}{(-)} \lambda_i k_i = 0, \quad \lambda_i \in \mathbf{Z}\backslash 0, \qquad \textbf{q.e.d.} . \end{aligned}$$

Ausgehend von dem allgemeinen Ansatz nach Satz 7 werden nachfolgend Spezialisierungen abgeleitet. Dabei wird das Ziel verfolgt, daß die Vollständigkeit der Fourierdeskriptoren unter der Normierung möglichst erhalten bleibt.

[1] Bekanntlich hat $z^{1/s}$ genau s Wurzeln. Diese liegen in der komplexen Ebene auf dem Kreis mit dem Mittelpunkt im Ursprung und dem Radius $\mid z \mid$. Der Phasenwinkel zwischen benachbarten Lösungen ist $2\pi/s$. Beispiel: $\{1^{1/4}\} = \{+1, -1, +j, -j\}$

Definition:

$$\Phi_k \stackrel{def}{=} C_k / \mid C_k \mid = e^{j\arg(C_k)}, \qquad \mid C_k \mid \neq 0.$$

Die von Null verschiedenen komplexen C_k bzw. C_{k_i} sind somit durch die Produkte $|C_k|\Phi_k$ bzw. $\mid C_{k_i} \mid \Phi_{k_i}$darstellbar. Faßt man nun k_0 als den laufenden Index k und alle übrigen k_i als fest auf, dann erhält man eine äquivalente Darstellung des Potenzproduktes (51):

$$\mid C_k \mid \Phi_k^{\lambda_0} \quad \prod_{i=1}^{n} \mid C_{k_i} \mid^{\lambda_i} \prod_{i=1}^{n} \Phi_{k_i}^{\lambda_i}.$$

Die Option (*) ist hier nicht mehr erforderlich, da sie bei den Betragstermen irrelevant ist und bei den Phasentermen durch die Vorzeichen der Exponenten erfaßt wird. Es gilt nämlich $\Phi^* = \Phi^{-1}$. Der erste Produktterm ist reell und trägt nichts zur Normierung auf Z-Invarianten bei. Läßt man ihn weg, so erhält man Z-Invarianten, die mit den Fourierdeskriptoren dem Betrage nach übereinstimmen. Dies ist von großem Vorteil, weil dadurch schon per Definition die Erhaltung der strukturspezifischen Information in den Beträgen der Fourierdeskriptoren garantiert wird. Wir nennen Z-Invarianten, die sich auf die Form

$$\mid C_k \mid \Phi_k^{\lambda_0} \prod_{i=1}^{n} \Phi_{k_i}^{\lambda_i}, \qquad \lambda_0 k + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i k_i = 0, \qquad \lambda_i \in \mathbf{Z}\backslash 0$$

bringen lassen, *betragstreu* und betrachten von nun an nur noch solche. Sowohl die Lösbarkeit der diophantischen Gleichung als auch deren Lösungen, soweit sie existieren, hängen in dieser Darstellung vom laufenden Index k ab. Dieser Mangel wird auf einfachste Weise dadurch beseitigt, daß man den Produktterm in der $k-$ten Potenz ansetzt. Damit erhält man die folgende Spezialisierung betragstreuer Z-Invarianten:

$$\mid C_k \mid \Phi_k^{\lambda_0} [\prod_{i=1}^{n} \Phi_{k_i}^{\lambda_i}]^k, \qquad \lambda_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i k_i = 0, \qquad \lambda_i \in \mathbf{Z}\backslash 0.$$

Hierin ist die diophantische Gleichung genau dann lösbar, wenn der größte gemeinsame Teiler der k_i auch λ_0 teilt (siehe Anhang D). Wir zeichnen die kleinste positive Zahl, welche die Lösbarkeitsbedingung erfüllt, durch die Definition

$$\lambda_0 \stackrel{def}{=} ggT\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$$

aus. Dies hat den folgenden Grund. Die strukturspezifische Phaseninformation der Fourierdeskriptoren ist in den Faktoren $\Phi_k^{\lambda_0} = e^{j\lambda_0\varphi_k}$ enthalten. Die Phasen φ_k haben Werte aus dem Intervall $[0, 2\pi)$. Durch den Exponenten λ_0 wird das Phasenintervall um den Faktor λ_0 „gestreckt". Wegen der Phasenmehrdeutigkeit $\text{modulo}_{2\pi}$ bewirkt dies einen Verlust der strukturspezifischen Phaseninformation um den Faktor λ_0. In anderen Worten: Zu jeder Potenz $\Phi_k^{\lambda_0}$ gibt es genau λ_0 verschiedene Werte für Φ_k. Der Verlust ist *minimal*, wenn $\mid \lambda_0 \mid$ den kleinstmöglichen, von Null verschiedenen Wert, annimmt. Mit obiger Definition

wird somit einerseits die Lösbarkeit der diophantischen Gleichung, andererseits ein Maximum an strukturspezifischer Information der Z-Invarianten garantiert. Im Falle $\lambda_0 = 1$ bleibt die strukturspezifische Information der Fourierdeskriptoren vollständig erhalten. In diesem Falle übertragen sich die Eigenschaften der Fourierdeskriptoren bezüglich *Umkehrbarkeit* und *Vollständigkeit* unverändert auf die Z-Invarianten. Der Produktterm bewirkt nämlich lediglich eine zum Index k proportionale Phasenverschiebung, die ohne Einfluß auf die Signalstruktur ist. In der Nachrichtentheorie heißt solch ein Term *Allpaß*.

Zusammenfassend gilt:

Satz 8 *:*

Voraussetzungen:

1. $\{C_k | k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty\}$ *ist vollständig.*
2. $\exists \{k_1, k_2, \ldots, k_n\} : \ | C_{k_i} | \neq 0.$
3. $\lambda_0 \stackrel{def}{=} ggT\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}.$

Die Folge

$$| C_k | \, \Phi_k^{\lambda_0} [\prod_{i=1}^{n} \Phi_{k_i}^{\lambda_i}]^k, \qquad k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty,$$

in der die λ_i die diophantische Gleichung

$$\lambda_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i k_i = 0, \qquad \lambda_i \in \mathbf{Z} \backslash 0.$$

erfüllen, ist ein vollständiges *Invariantensystem unter G_Z , wenn $\lambda_0 = 1$.*

Sie ist nicht vollständig, trägt jedoch ein Maximum an strukturspezifischer Information, falls $\lambda_0 \neq 1$. Wegen der dritten Voraussetzung ist die diophantische Gleichung immer lösbar.

Die Erhaltung der Signalstruktur im Falle $\lambda_0 = 1$ wird durch folgende Überlegung veranschaulicht: Wendet man auf einen Satz von Fourierdeskriptoren und den entsprechenden Satz von Z-Invarianten die Fouriersynthese an, so erhält man kongruente Bilder. Nur die Aufpunkte sind verschieden. Wir nennen daher solche Invariantensysteme *verzerrungsfrei.* Ist das System der Fourierdeskriptoren vollständig, so ist auch das verzerrungsfreie Z-Invariantensystem vollständig.

Beispiele

Potenzprodukt $n = 1$

Ansatz:

$$P_k = C_k^{\lambda} C_q^{*\mu}, \qquad \lambda k - \mu q = 0, \qquad \lambda, \mu \in \mathbf{Z} \backslash 0.$$

Die verschiedenen Lösungen der Nebenbedingung führen auf Z-Invariantensysteme mit unterschiedlichen Eigenschaften:

- $\lambda = \mu : P_k = (C_k C_k^*)^{\lambda}$
  Die Betragsquadrate (in beliebiger Potenz) unterdrücken die Phasen. Sie sind nicht vollständig.

- $\lambda = q : P_k = C_k^q C_q^{*k}$
  Die Phasen der C_k werden mit q multipliziert. Dadurch wird die Phaseninformation der C_k um den Faktor q reduziert. Die Invarianten sind nicht vollständig, enthalten jedoch mehr Information als die Betragsquadrate. Diese Normierung ist ähnlich mit der von Zahn und Roskies [43] (siehe Kapitel 9).

- $\lambda = 1 : P_k = C_k C_q^{*k/q}$
  Die Folge ist nur an den Stellen $k = \pm q, \pm 2q, \ldots$ eindeutig, an allen übrigen Stellen existieren q Wurzeln.

Im Fall $\lambda = q = 1$ gehen die beiden zuletzt genannten Beispiele ineinander über. Die Invarianten $P_k = C_k C_1^{*k} = C_k \mid C_1 \mid \exp(-jk\varphi_1)$ unterscheiden sich von den Fourierdeskriptoren nur um einen konstanten Amplitudenfaktor $\mid C_1 \mid$ und eine zum Index k proportionale Phasenverschiebung $-k\varphi_1$. Sie verändern daher nichts an der strukturspezifischen Information der Fourierkoeffizienten.

Betragstreue Z-Invarianten 0. Ordnung

Die Folge $\mid C_k \mid$: $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ ist ein betragstreues Invariantensystem. Es enthält nur die strukturspezifische Betragsinformation der Fourierdeskriptoren, die Phaseninformation wird vollständig eliminiert.

Betragstreue Z-Invarianten 1. Ordnung

Ansatz:

$$\mid C_k \mid \Phi_k^{\lambda_0} \Phi_q^{k\lambda}, \qquad \lambda_0 + \lambda q = 0.$$

Voraussetzungsgemäß gilt:

$$\lambda_0 = ggT(q) = q.$$

Daraus folgt:

$$\lambda = -1.$$

Somit haben die betragstreuen Invarianten 1. Ordnung die Form

$$\mid C_k \mid \Phi_k^q \Phi_q^{-k}.$$

Sie sind dann und nur dann *verzerrungsfrei* falls $q = \pm 1$.

<u>Verzerrungsfreie Z-Invarianten 2. Ordnung</u>

In diesem Beispiel wird demonstriert, daß verzerrungsfreie Z-Invarianten ohne die Beschränkung auf einen der beiden Indizes ± 1 durch Erhöhung der Ordnung gebildet werden können. Ansatz:

$$\mid C_k \mid \Phi_k \Phi_q^{k\lambda} \Phi_r^{k\mu}, \qquad 1 + \lambda q + \mu r = 0, \qquad ggT(q,r) = 1.$$

Um einen Eindruck von der Lösungsvielfalt zu geben, werden nachfolgend in einer Tafel alle Kombinationen von q und r in den Wertebereichen

$$\begin{aligned} q &= \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm 13, \\ r &= \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm 13 \end{aligned}$$

mit $*$ bezeichnet, für welche Lösungen existieren.

$\pm q \rightarrow$ / $\pm r \downarrow$	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13
01	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
02	*		*		*		*		*		*		*
03	*	*		*	*		*	*		*	*		*
04	*		*		*		*		*		*		*
05	*	*	*	*		*	*	*	*		*	*	*
06	*				*		*				*		*
07	*	*	*	*	*	*		*	*	*	*	*	*
08	*		*		*		*		*		*		*
09	*	*		*	*		*	*		*	*		*
10	*		*				*		*		*		*
11	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*		*	*
12	*				*		*				*		*
13	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	

Beispielsweise ist

$$\mid C_k \mid \Phi_k [\Phi_5^{-3} \Phi_7^2]^k, \qquad k = \pm 1, \pm 2 \ldots ,$$

ein verzerrungsfreies Invariantensystem, *ohne daß* zur Normierung einer der Indizes ± 1 verwendet wird.

Auf ähnliche Weise können verzerrungsfreie Invariantensysteme höherer als zweiter Ordnung gebildet werden. Im allgemeinen nehmen die Lösungsbeschränkungen der diophantischen Gleichung mit zunehmender Ordnung ab. Es gilt nämlich:

$$ggT\{k_1, \ldots, k_n, k_{n+1}\} \leq ggT\{k_1, \ldots, k_n\}.$$

Die Lösung diophantischer Gleichungen beliebigen Grades unter Verwendung des Euklidischen Algorithmus' wird im Anhang dargestellt.

6 Affininvariante Fourierdeskriptoren

In den vorangegangenen Abschnitten wurde die Bildung von Invarianten unter der Gruppe der affinen Transformationen G_A und der Gruppe der Aufpunktsverschiebungen G_Z unabhängig voneinander behandelt. In diesem Abschnitt werden die bisherigen Ergebnisse zu Invariantensystemen unter der Obergruppe G_{AZ} kombiniert. Die Invarianten nennen wir *affininvariante Fourierdeskriptoren* oder auch, der Kürze halber, *AZ-Invarianten.*

Für die Gruppe G_{AZ} der affinen Abbildungen und der Aufpunktsverschiebungen gilt nach Abschnitt 4.3:

$$Q_k = z^{k-p} Q_k^0, \qquad | z |= 1, \qquad k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty, \qquad p = konst.$$

Hierin ist p der Index, der bei der Bildung der Q_k verwendet wurde.

Das Problem der Bildung von AZ-Invarianten unterscheidet sich von dem der Bildung von Z-Invarianten nur durch das Auftreten des konstanten komplexen Faktors z^{-p}. Daher lassen sich die in Kapitel 5 erzielten Ergebnisse unmittelbar übertragen. Es wird darauf verzichtet, von einem allgemeinen Ansatz aus, wie bei den Z-Invarianten, die speziellen Invariantensysteme, die letztlich von Interesse sind, zu entwickeln. Wir beschränken uns hier auf *betragstreue* Invariantensysteme, welche die *verzerrungsfreien* Invariantensysteme als Sonderfälle einschließen.

Definition:

$$\Psi_k \stackrel{def}{=} \frac{Q_k}{| Q_k |}.$$

Satz 9 *:*

Voraussetzungen:

1. $\{Q_k | k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty\}$ *ist vollständig.*
2. $\exists \{k_1, k_2, \ldots, k_n\} : \quad | Q_{k_i} | \neq 0, \quad k_i \neq p.$
3. $\lambda_0 \stackrel{def}{=} ggT\{k_1 - p, k_2 - p, \ldots, k_n - p\}.$

Die Folge

$$I_k = | Q_k | \, \Psi_k^{\lambda_0} \prod_{i=1}^{n} \Psi_{k_i}^{(k-p)\lambda_i}, \qquad k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty \, , \tag{53}$$

in der die λ_i die diophantische Gleichung

$$\lambda_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (k_i - p) = 0, \qquad \lambda_i \in \mathbf{Z} \backslash 0,$$

erfüllen, ist ein absolutes, betragstreues *Invariantensystem unter* G_{AZ} . *Es ist* vollständig, *falls* $\lambda_0 = 1$. *Andernfalls ist es* nicht vollständig, *trägt jedoch ein Maximum an strukturspezifischer Information. Eine endliche Anzahl, nämlich genau* λ_0 *verschiedene Werte von* Q_k, *ergeben denselben Wert von* I_k. *In diesem Sinne reduziert die Normierung die strukturspezifische Information um den Faktor* λ_0. *Wegen der dritten Voraussetzung ist die diophantische Gleichung immer lösbar.*

Das Produkt hat nur ganzzahlige Exponenten und ist daher eindeutig. Der Term z^{k-p} wird unter der diophantischen Gleichung als Nebenbedingung eliminiert. Ein entsprechender Beweis wurde im Kapitel über Z-Invarianten geführt.

Besondere Beachtung verdient der Fall, in dem die Folge der Q_k eine *s-fach rotationssymmetrische* Kurve repräsentiert. In diesem Fall sind alle Q_k, deren Indizes nicht durch $k = p, p \pm s, p \pm 2s, p \pm 3s, \ldots$ erfaßt werden, identisch Null. Somit ist der größte gemeinsame Teiler der Indexdifferenzen $k_1 - p, k_2 - p, \ldots, k_n - p$ mindestens s. Die Anwendung des Satzes 9 führt daher, außer im Falle $s = 1$, auf nicht vollständige Invarianten. Ist jedoch das System $\{Q_k | k = \pm 1, \pm 2 \ldots\}$ vollständig, so ist auch das Teilsystem $\{Q_k | k = p, p \pm s, \pm 2s, \ldots\}$ vollständig; alle übrigen Q_k sind ja identisch Null. Für das Teilsystem sind die Exponenten $(k-p)\lambda_i$ ganzzahlige Vielfache von s. Um zu möglichst kleinen Werten für λ_0 zu kommen, werden nachfolgend die Exponenten des Produktterms durch s dividiert. Sie bleiben dadurch ganzzahlig, jedoch wird λ_0 dadurch um den Faktor s reduziert. Die Invarianten mit dem Betrag Null werden von dieser Maßnahme nicht berührt.

Satz 10 *:* **Affininvariante Fourierdeskriptoren**

Voraussetzungen:

1. $s \geqq 1$ *ist Grad der Symmetrie .*
2. $\{Q_k | k = p, p \pm s, p \pm 2s, p \pm 3s, \ldots\}$ *ist vollständig.*
3. $\exists \{k_1, k_2, \ldots, k_n\} : \ | Q_{k_i} | \neq 0, k_i \neq p.$
4. $\lambda_0 \stackrel{def}{=} ggT\{\frac{k_1-p}{s}, \frac{k_2-p}{s}, \ldots, \frac{k_n-p}{s}\}.$

Die Folge

$$| Q_k | \ \Psi_k^{\lambda_0} \prod_{i=1}^{n} \Psi_{k_i}^{\lambda_i (k-p)/s}, \qquad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots,$$

in der die λ_i *die diophantische Gleichung*

$$\lambda_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (k_i - p)/s = 0, \qquad \lambda_i \in \mathbf{Z} \backslash 0,$$

erfüllen, ist ein vollständiges *Invariantensystem unter G_{AZ} , wenn $\lambda_0 = 1$. Eine hinreichende Bedingung dafür ist, daß eines der k_i vom Index p den Abstand s hat. Sie ist nicht vollständig, trägt jedoch ein Maximum an strukturspezifischer Information falls $\lambda_0 \neq 1$. Wegen der vierten Voraussetzung ist die diophantische Gleichung immer lösbar.*

Man beachte, daß die Überlegungen zur Symmetrie sich nicht auf die Originalkurve (Fourierdeskriptoren) beziehen, sondern auf die Kurve, die durch die A-Invarianten $\{Q_k\}$ repräsentiert wird. Beispielsweise ist ein ungleichseitiges Dreieck 1–fach rotationssymmetrisch. Dessen A-Invarianten repräsentieren jedoch ein gleichseitiges Dreieck (siehe Bild 13), also eine Kurve von 3–facher Rotationssymmetrie.

Beispiele

AZ-Invarianten 0. Ordnung

Die Folge $\mid Q_k \mid$: $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ ist ein betragstreues Invariantensystem. Es enthält nur die strukturspezifische Betragsinformation, die Phaseninformation wird vollständig eliminiert.

AZ-Invarianten 1. Ordnung

Ansatz:

$$\mid Q_k \mid \Psi_k^{\lambda_0} \Psi_q^{(k-p)\lambda}, \qquad \lambda_0 + \lambda(q-p) = 0, \qquad \lambda_0 = q - p.$$

Daraus folgt:

$$\lambda = -1.$$

Somit haben die AZ-Invarianten 1. Ordnung die Form

$$\mid Q_k \mid \Psi_k^{q-p} \Psi_q^{p-k}.$$

Sie sind dann und nur dann verzerrungsfrei, wenn die Indizes q und p sich um Eins unterscheiden.

AZ-Invarianten 1. Ordnung bei Symmetrie vom Grad s

Zum Vergleich betrachten wir die Bildung von AZ-Invarianten 1. Ordnung bei Symmetrie vom Grad s.

Ansatz:

$$\mid Q_k \mid \Psi_k^{\lambda_0} \Psi_q^{\lambda(k-p)/s}, \qquad \lambda_0 + \lambda(q-p)/s = 0, \qquad \lambda_0 = (q-p)/s.$$

Daraus folgt:

$$\lambda = -1,$$

und

$$| Q_k | \Psi_k^{(q-p)/s} \Psi_q^{(p-k)/s}.$$

Die Folge ist dann und nur dann verzerrungsfrei, wenn die Indizes q und p sich um s unterscheiden. Für $q - p = s$ gilt:

$$| Q_k | \Psi_k \Psi_q^{(p-k)/(q-p)}.$$

Eine entsprechende Normierung der Fourierdeskriptoren wird in [6] angegeben und für diese der Vollständigkeitsbeweis geführt (siehe Kapitel 9 unter dem Stichwort: Burkhardt 1979)

Zur Erhaltung der Signalstruktur

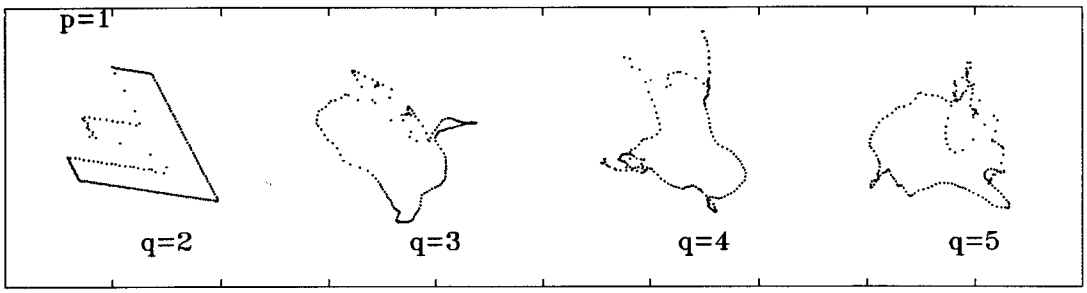

Bild 14: Kurven nach Anwendung der Fouriersynthese auf AZ-Invarianten.

In Bild 6 sind vier verschiedene Konturen dargestellt. Diese wurden durch Fouriersynthese der AZ-Invarianten 1. Ordnung

$$I_k = | Q_k | \Psi_k^{q-1} \Psi_q^{1-k}, \qquad k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm 50,$$

der „F"-förmigen Kontur erzeugt. Die Transformation der A-Invarianten Q_k in die AZ-Invarianten I_k ist nur im Fall $q = 2$ verzerrungsfrei. Dies äußert sich im Bild dadurch, daß die Signalstruktur, soweit sie durch die A-Invarianten repräsentiert wird, in diesem Fall erhalten bleibt. In allen anderen Fällen treten ebenfalls invariante Kurven auf, deren Verläufe lassen jedoch keine Ähnlichkeiten mit dem Original erkennen.

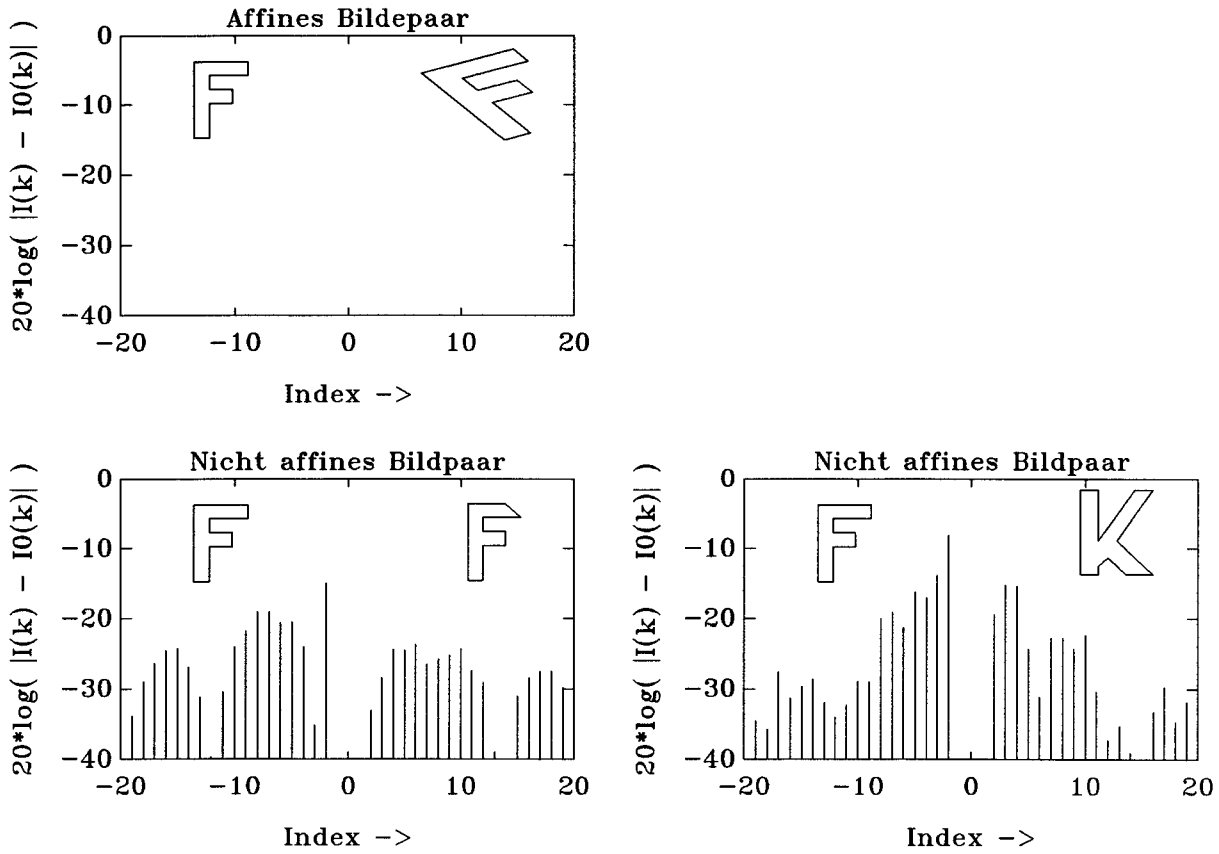

Bild 15: Leistungsspektren von AZ-Invarianten-Differenzen

In diesem Beispiel dient die Kontur des Buchstabens „F“ in aufrechter Stellung als Referenzkontur. Mit dieser werden weitere Konturen anhand der Differenzen der affininvarianten Merkmale verglichen. Die Beträge der Invariantendifferenzen sind in Bild 15 in logarithmischem Maßstab dargestellt. Im linken oberen Teilbild erfolgt der Vergleich mit einer stark verzerrten, jedoch affinen Kontur. Aufgrund numerischer Fehler treten von Null verschiedene Merkmalsdifferenzen auf. Deren Werte sind jedoch so klein, daß sie durch den dargestellten Bereich nicht mehr erfaßt werden.

Die Kontur, mit der im linken unteren Teilbild verglichen wird, unterscheidet sich bei subjektiver Betrachtung nur „wenig“ von der Referenzkontur, objektiv gesehen ist sie jedoch kein affines Bild der Referenzkontur. Der Pegel der Merkmalsdifferenzen liegt signifikant über dem Fehlerpegel der Rechnung.

Die Kontur, mit der im rechten unteren Teilbild verglichen wird, unterscheidet sich dagegen sehr von der Referenzkontur. Der größere Unterschied im Originalbereich führt auf einen erhöhten Pegel der „niederfrequenten“ Merkmalsdifferenzen.

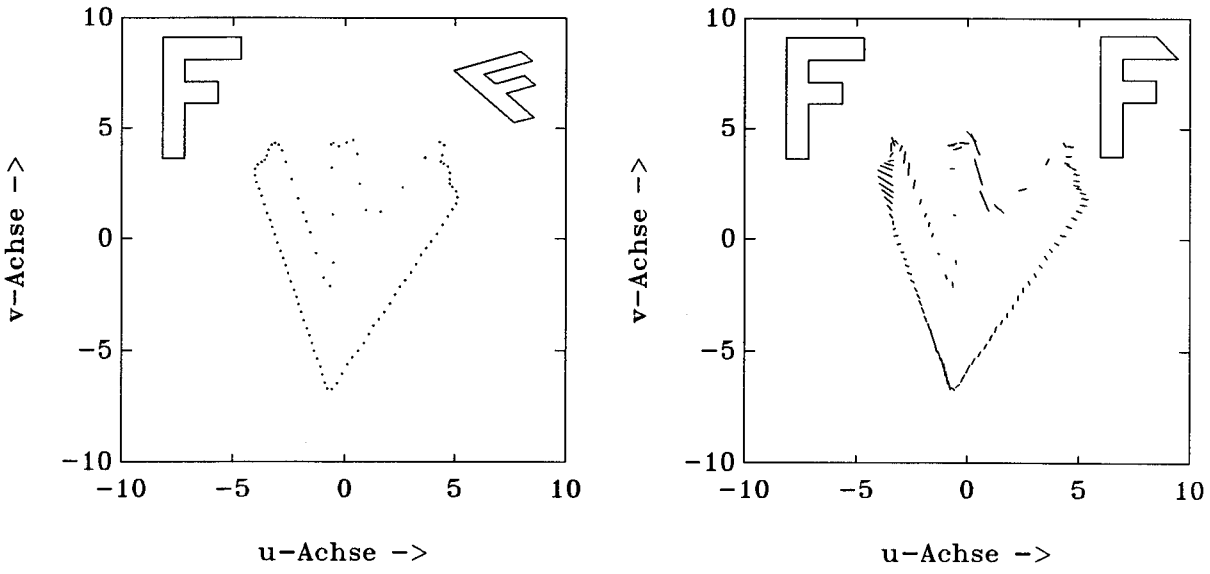

Bild 16: Konturvergleich im Musterraum

Im Beispiel nach Bild 16 wurden die AZ-Invarianten rücktransformiert und korrespondierende Kurvenpunkte durch Geraden verbunden. Korrespondierend sind hier solche Punkte, die bei der Rücktransformation zum selben, auf die jeweilige Periode normierten, Parameter gehören. Im Fall affiner Originale (links) decken sich die Rücktransformierten. Im zweiten Fall (rechts), in dem die Originale nur lokal voneinander abweichen, weichen die Rücktransformierten global voneinander ab. Die Beispiele nach den Bildern 15 und 16 weisen darauf hin, daß die AZ-Invarianten i.a. nicht geeignet sind, Muster, die sich nur lokal unterscheiden (z.B. durch teilweise Verdeckung), einander zuzuorden.

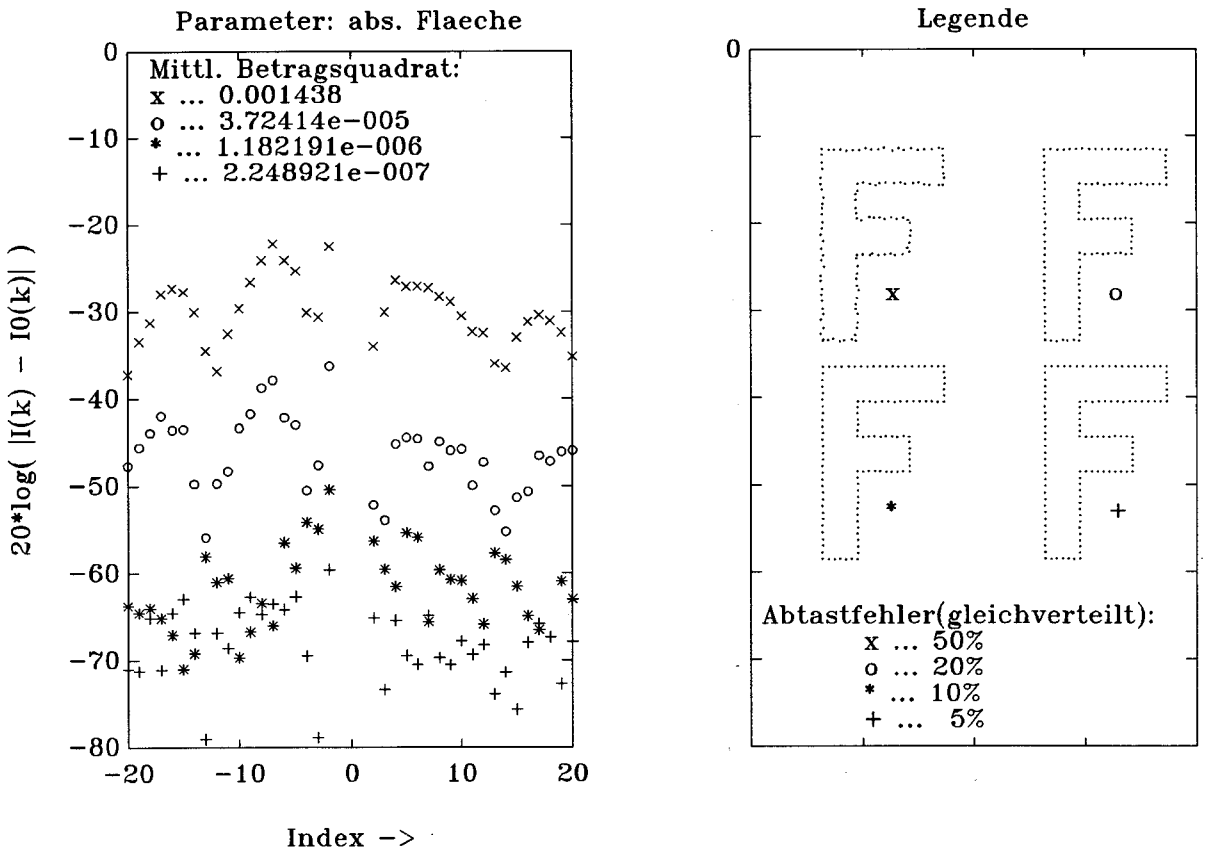

Bild 17: AZ-Invariantenfehler unter zufälliger Konturstörung

Zur Wirkung zufälliger Störungen

Zufällige Störungen wirken sich zweifach aus. Zum ersten als Parameterfehler, zum zweiten als Funktionsstörung. Dabei ist der Parameterfehler von übergeordneter Bedeutung. Dies wird in den nachfolgenden Beispielen demonstriert. Dazu werden die AZ-Invarianten einer fehlerfreien Kurve mit denen einer fehlerbehafteten verglichen. Die fehlerbehaftete Kurve wurde aus der äquidistant abgetasteten, fehlerfreien Kurve durch Überlagerung eines gleichverteilten Zuschlags abgeleitet (Bilder 17,18 und 19). Die Breite der Fehlerverteilung wird in % des Abtastintervalls angegeben.

Bild 17 zeigt die Fehleramplituden der AZ-Invarianten bei Parametrisierung durch die abs. Fläche für die Fehlerintervalle von 5, 10, 20 und 50%. Bis zum Abtastfehler von 10% des Abtastintervalls liegt der Fehlerpegel unter -50 dB, also deutlich unter dem Pegel der Merkmalsdifferenzen in dem Beispiel nach Bild 15. Bei Abtastfehlern von 50% erreicht der Fehlerpegel ein so hohes Niveau, daß in dem genannten Beispiel die Zahl der signifikanten Merkmale deutlich beschränkt wird.

Als sehr viel robuster erweisen sich die AZ-Invarianten bei Parametrisierung durch die vorzeichenbehaftete Fläche.

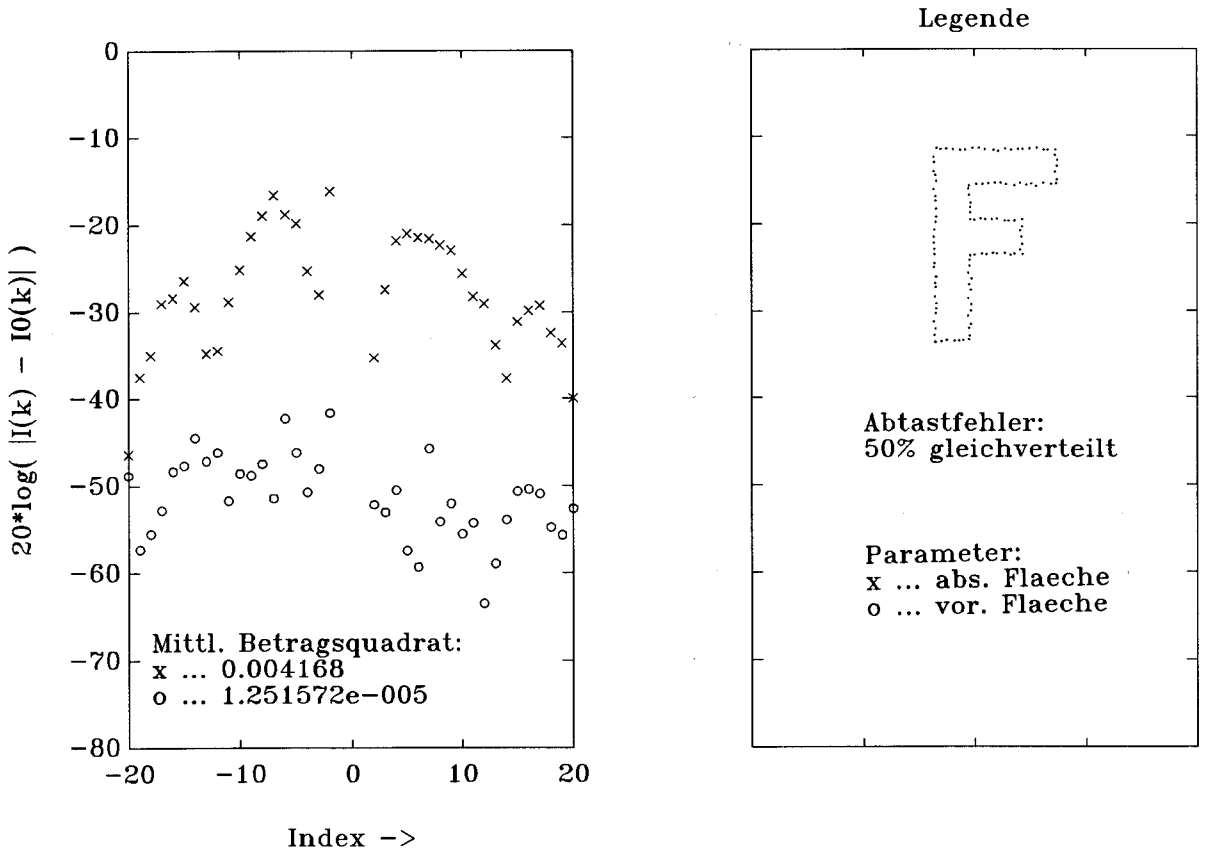

Bild 18: AZ-Invariantenfehler bei zufälliger Konturstörung und unterschiedlichem Kurvenparameter

In Bild 18 sind die Fehleramplituden für die beiden Parametrisierungen, absolute Fläche und vorzeichenbehaftete Fläche, angegeben. Die Maximalwerte unterscheiden sich ungefähr um den Faktor 316 (ca.25 dB), die mittleren Betragsquadrate um den Faktor 333. Der Grund für diese großen Unterschiede ist in dem dominierenden Einfluß des Parameterfehlers zu suchen. Dies wird durch ein weiteres Beispiel nach Bild 19 belegt. Hier wurden den fehlerhaften Abtastwerten die Parameterwerte der fehlerfreien Kurve zugeordnet. Durch diese Maßnahme wird der Fehlerpegel im Falle der Parametrisierung durch die abs. Fläche drastisch gesenkt. Die Fehleramplituden für die beiden Arten der Parametrisierungen bilden weitgehend überdeckende Cluster und dies auf niedrigem Niveau. Die mittleren Betragsquadrate der Fehler unterscheiden sich nunmehr nur noch um den Faktor 1,5 (vorher 333).

Gegenüber dem vorangegangenen Beispiel mit fehlerbehafteter Parametrisierung ist eine Reduktion der mittleren quadratischen Fehler um die Faktoren 412 (abs. Fläche) und 1,88 (vorzeichenbehaftete Fläche) festzustellen. Diese Werte unterstreichen die Bedeutung des Parameterfehlers, vornehmlich bei Parametrisierung durch die abs. Fläche.

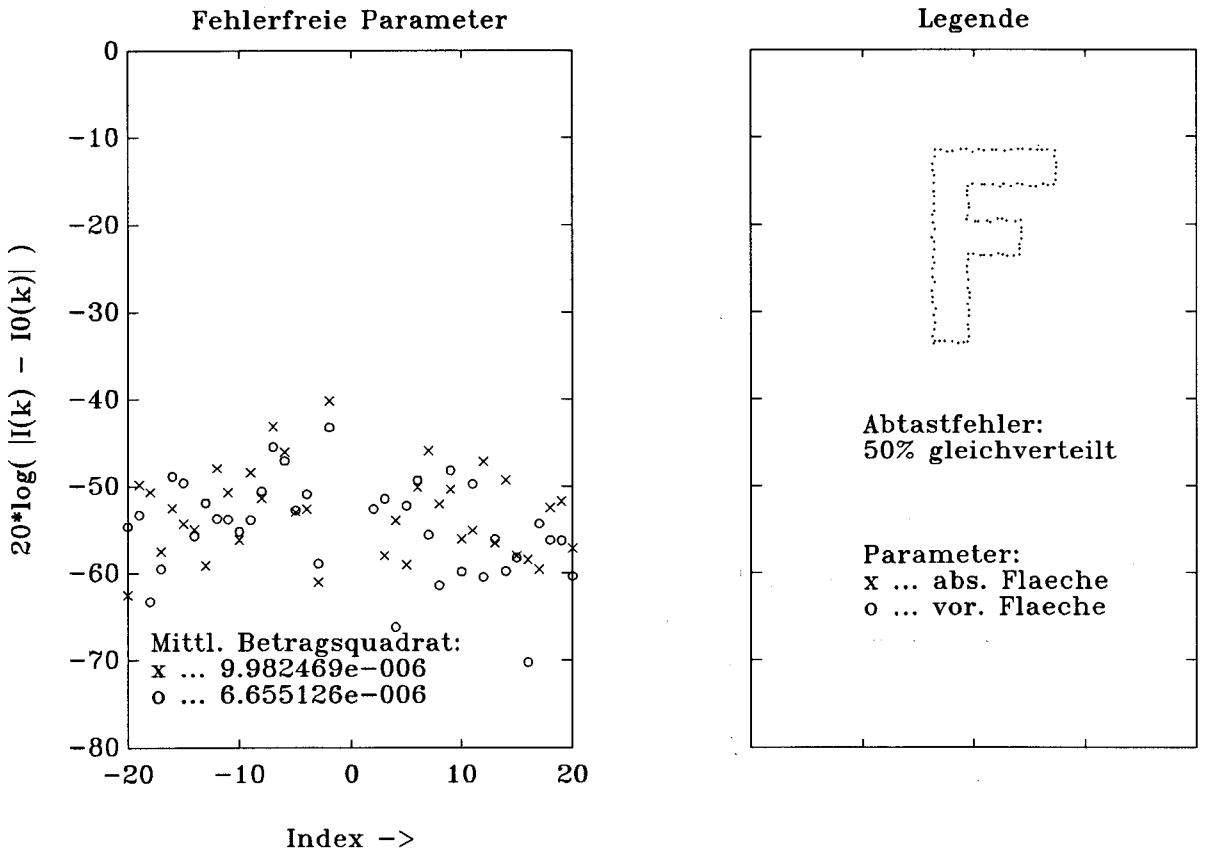

Bild 19: AZ-Invariantenfehler bei unterdrücktem Parameterfehler

Die hier verwendete Vorgehensweise zur Unterdrückung des Parameterfehlers ist selbstverständlich nur in der Simulation, nicht jedoch in der Praxis, anwendbar. Das Ergebnis weist jedoch darauf hin, daß in der Praxis gegebenenfalls ein Vorverarbeitungsschritt zur Restauration der Kurve angezeigt ist, etwa dann, wenn die Kurve aus den Daten eines digitalen Bildspeichers abgeleitet wird.

7 Bestimmung von Bewegungsparametern

In den folgenden Abschnitten wird zunächst ein Verfahren zur Bestimmung der Bewegungsparameter in der Musterebene (Parameter der affinen Abbildung) entwickelt. Dabei werden Fourierdeskriptoren der Kurve, unter Verwendung von Fourierdeskriptoren der affinen Referenzkurve, normiert. Zur Wirkung zufälliger Störungen werden Beispiele dargestellt. Abschließend wird auf eine Anwendungsmöglichkeit, die Bestimmung der räumlichen Lage und Orientierung ebener Objekte aus Kamera-Bildern, eingegangen.

7.1 Parameter der affinen Abbildung in der Musterebene

Es sei $\mathcal{C}$ ein affines Bild einer geschlossenen Kurve $\mathcal{C}^0$ in der komplexen Ebene $\mathbf{C}$. Gesucht werden die komplexen Parameter a, b und c der Abbildung

$$x = ax^0 + bx^{0*} + c$$

von $\mathcal{C}^0 = \{x^0\}$ auf $\mathcal{C} = \{x\}$.

Zwischen den Fourierdeskriptoren beider Kurven bestehen die Beziehungen (siehe Abschnitt 3.4):

$$\begin{aligned} C_k &= z^k(aC_k^0 + bC_{-k}^{0*}): & k \neq 0, \\ C_0 &= aC_0^0 + bC_0^{0*} + c: & k = 0. \end{aligned}$$

Jedes Paar $C_q, C_r : q, r \neq 0$ liefert ein lineares Gleichungssystem in a und b:

$$\begin{pmatrix} C_q \\ C_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^q & 0 \\ 0 & z^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_q^0 & C_{-q}^{0*} \\ C_r^0 & C_{-r}^{0*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Dieses ist eindeutig lösbar, wenn die Determinanten beider Matrizen von Null verschieden sind. Die Determinante z^{q+r} hat den Betrag Eins. Somit verbleibt als Lösbarkeitsbedingung:

$$\Delta^0 = C_q^0 C_{-r}^{0*} - C_r^0 C_{-q}^{0*} \neq 0.$$

Die Lösung lautet dann:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta^0} \begin{pmatrix} C_{-r}^{0*} & -C_{-q}^{0*} \\ -C_r^0 & C_q^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^{-q} & 0 \\ 0 & z^{-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_q \\ C_r \end{pmatrix}, \tag{54}$$

und enthält noch z als Parameter. Zur Bestimmung von a und b nach dieser Gleichung muß z vorab berechnet werden. Aus dem 0-ten Fourierdeskriptor ergibt sich die Translation:

$$c = C_0 - aC_0^0 - bC_0^{0*}. \tag{55}$$

Bestimmung der Parameters z

Wir definieren analog zu Δ^0 eine Größe Δ:

$$\Delta = C_q C_{-r}^* - C_r C_{-q}^*.$$

Für diese gilt:

$$\Delta = z^{q+r}|A|\Delta^0 \neq 0.$$

Daraus folgt:

$$z = \left(\frac{\Delta \mid \Delta^0 \mid}{\Delta^0 \mid \Delta \mid}\right)^{\frac{1}{q+r}}. \tag{56}$$

Die Gleichung hat $\mid q + r \mid$ Wurzeln. Sie ist eindeutig, falls $\mid q + r \mid = 1$. Man beachte, daß bei der Wahl zweier Indizes q und r auch die Fourierdeskriptoren mit den Indizes $-q$ und $-r$, also insgesamt vier, in die Rechnung eingehen. Dabei ist es jedoch nicht gleichgültig, welches Indexpaar aus den vier zur Verfügung stehenden die Bezeichnungen q und r erhält, und zwar einerseits wegen der Anzahl der Wurzeln für z, andererseits wegen unterschiedlicher Auswirkungen von Fehlern, wie später gezeigt wird.

Behandlung von Mehrdeutigkeiten

Für ein zweites Indexpaar q', r' gelte:

$$\mid q' + r' \mid \neq \mid q + r \mid .$$

Die Bedingung wird schon dann erfüllt, wenn $q' = q$ und $r' \neq r$ (oder umgekehrt), d.h. wenn nur ein neuer Index eingeführt wird. Mit diesem Paar hat

$$z' = \left(\frac{\Delta' \mid \Delta^{0'} \mid}{\Delta^{0'} \mid \Delta' \mid}\right)^{\frac{1}{q'+r'}}$$

$\mid q' + r' \mid$ Wurzeln. Die Parameter z und z' haben $g = ggT(q + r, q' + r')$ gemeinsame Wurzeln. Ist $g = 1$, so ist die einzige gemeinsame Wurzel die gesuchte. Andernfalls ist das Verfahren zur Reduktion der Anzahl von Lösungen wiederholt anzuwenden.

Beispiele

Ortskurven und Lösungspunkte für die Abbildungsparameter a und b

Im linken oberen Teilbild von Bild 20 ist ein Paar affiner Kurven dargestellt. Zur Bestimmung der Parameter a und b wurden die Indexpaare $q, r = 1, 2$ (oben) und $q, r = 1, 5$ (unten) gewählt. Für $z = e^{j\varphi} | 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ hat (54) Lösungen, die auf den dargestellten Ortskurven liegen. Die unendliche Lösungsmenge wird unter Verwendung von (56) auf 3 (oben) bzw. 5 (unten) diskrete Lösungen eingeschränkt. Da 3 und 5 teilerfremd sind, haben die beiden diskreten Lösungsmengen nur eine gemeinsame Lösung, die mit $*$ markierte, gemeinsam.

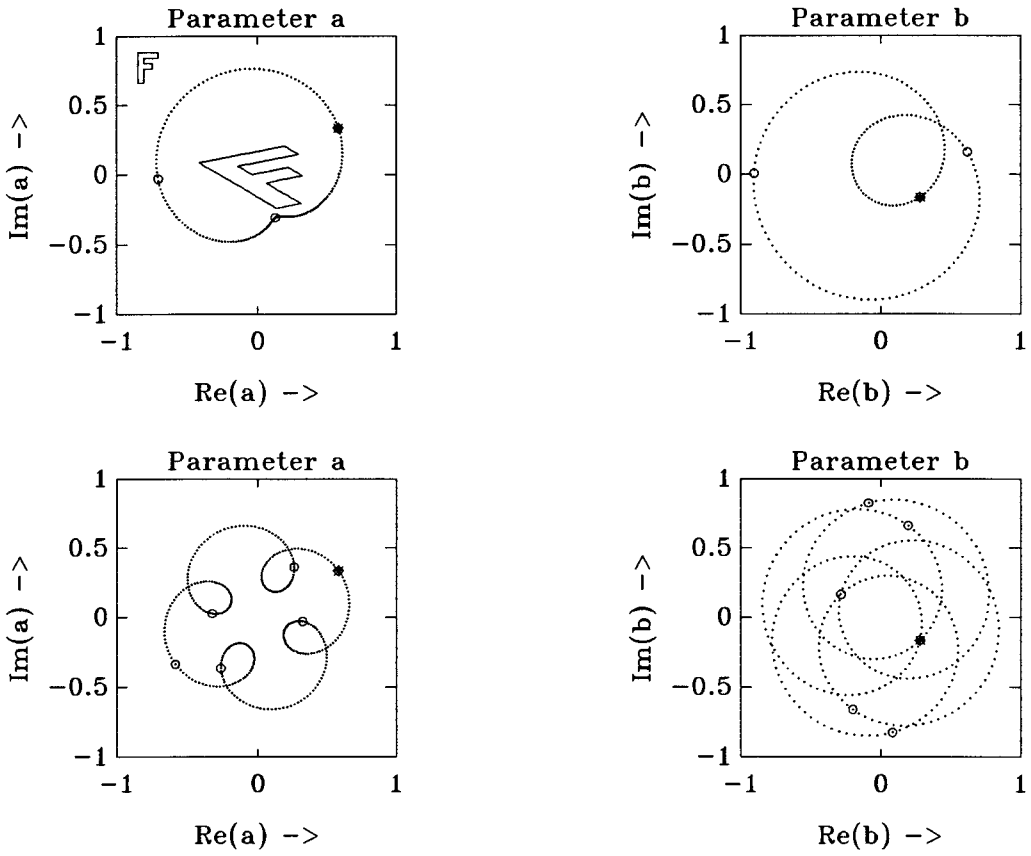

Bild 20: Ortskurven der Abbildungsparameter a und b für $0 \leq \tau \leq T$. $q = 1$, $r = 2$ (oben), $r = 5$ (unten), Kurvenparameter: abs. Fläche

Parameterfehler

Bei der Rückrechnung von Fourierdeskriptoren auf die Parameter der affinen Abbildung kommt der Größe Δ^0 eine besondere Bedeutung zu. Die Rückrechnung ist zunächst nur definiert, wenn Δ^0 von Null verschieden ist. Sind die Fourierdeskriptoren jedoch mit Fehlern behaftet, so sollte die Rechnung bei möglichst hohem Störabstand ausgeführt werden. Unter der Annahme eines gleichförmigen Störpegels bei den Fourierdeskriptoren wird dies durch die Wahl desjenigen Indexpaares (q, r) erreicht, für welches Δ^0 den größtmöglichen Wert hat. Dies folgt unmittelbar aus (54). Ferner wird an die unterschiedliche Störempfindlichkeit der Fourierdeskriptoren, abhängig vom Typ des Kurvenparameters, erinnert.

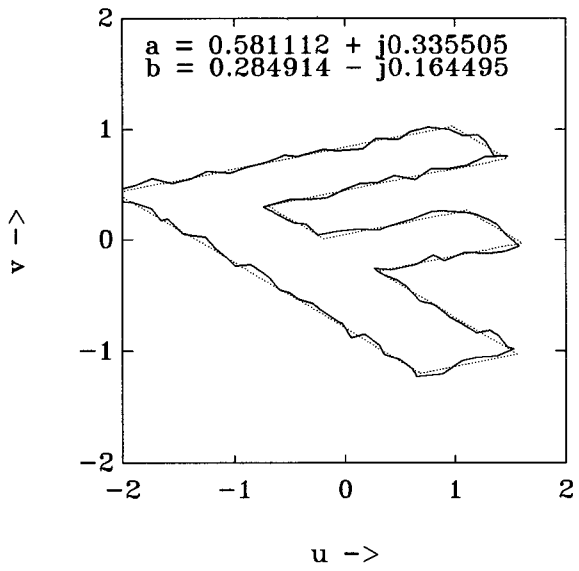

Bild 21: Beispiel für Konturstörung unter einem in u- und v-Richtung jeweils gleichverteilten Abtastfehler von 50% des Abtastintervalls

Nachfolgend werden in den Bildern 23 und 22 Fehlercluster für die rückgerechneten Parameter a und b unter Wirkung zufälliger Konturstörungen für verschiedene Indexpaare (q, r) und jeweils für die beiden in Frage kommenden Kurvenparameter dargestellt. Das Maß der Störung, welches hier zugrundegelegt wurde, ist aus Bild 21 ersichtlich. In den Tabellen 1 und 2 sind die Beträge von Δ^0 für erlaubte Indexpaare angegeben. Die Tabellen sind spiegelsymmetrisch zu den Diagonalen. Zu jedem Paar (q, r) gibt es daher drei gleichwertige Paare: $(-q, -r), (r, q)$ und $(-r, -q)$. Nicht gleichwertig sind jedoch die Paare (q, r) und $(q, -r)$. In dem folgenden Beispiel wurden $q = 1$ und $r = \pm 2, \pm 3$ gewählt. Die Werte aus beiden Tabellen nehmen, bezogen auf die angegebenen Indizes, in der Folge $r = +2, -2, -3, +3$ ab. (In Tabelle 2 ist für $r = +2, -2$ infolge Rundung derselbe Wert von 0 dB angegeben.) Im Mittel kann daher der geringste Fehler bei der Wahl von $r = 2$ und zunehmende Fehlerempfindlichkeit entsprechend der angegebenen Folge erwartet werden. Die Ausdehnungen der Fehlercluster bestätigen dies. Die Bilder zeigen darüber hinaus ein erheblich unterschiedliches Fehlerverhalten (Mittelwert, Streuung) der rückgerechneten Parameter in Abhängigkeit vom Kurvenparameter zugunsten der Parametrisierung durch die vorzeichenbehaftete Fläche. Alle Beispiele werden im selben Maßstab wiedergegeben. Einige Bilder zeigen weniger Markierungen als andere. In diesen Fällen überschreiten die Fehler den verfügbaren Zeichenbereich.

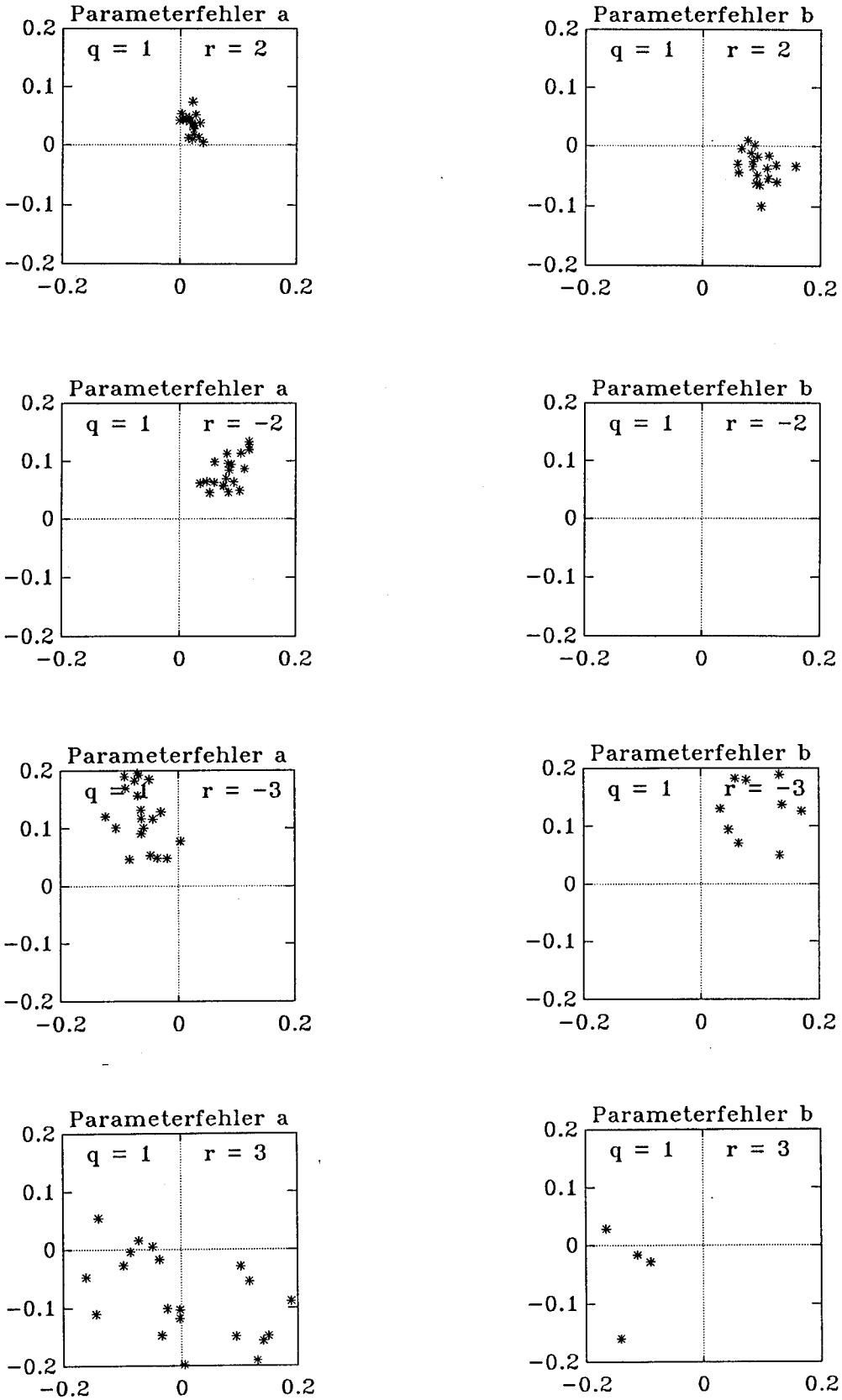

Bild 22: Fehler der Abbildungsparameter unter Konturstörungen bei Verwendung der <u>absoluten</u> Fläche als Kurvenparameter

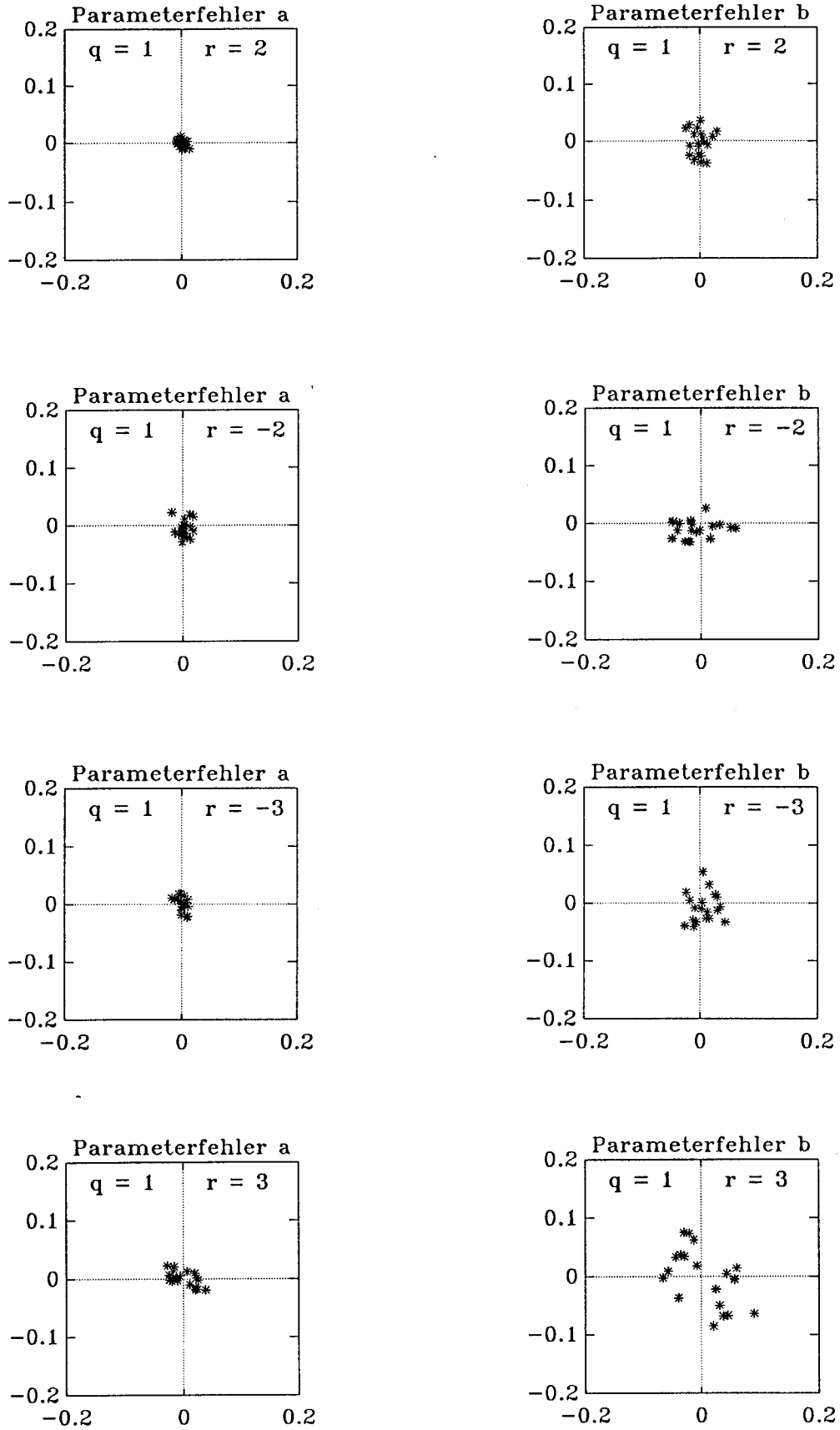

Bild 23: Fehler der Abbildungsparameter unter Konturstörungen bei Verwendung der <u>vororzeichenbehafteten</u> Fläche als Kurvenparameter

Tabelle 1: Beträge der Determinanten (in dB) bei Parametrisierung durch die absolute Fläche

Index	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
-5	.	-34	-33	-23	-11	.	-13	-22	-35	-39	.
-4	-34	.	-38	-18	-14	.	-7	-21	-28	.	-39
-3	-33	-38	.	-18	-20	.	-9	-20	.	-28	-35
-2	-23	-18	-18	.	1	.	-2	.	-20	-21	-22
-1	-11	-14	-20	1	.	.	.	-2	-9	-7	-13
0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1	-13	-7	-9	-2	.	.	.	1	-20	-14	-11
2	-22	-21	-20	.	-2	.	1	.	-18	-18	-23
3	-35	-28	.	-20	-9	.	-20	-18	.	-38	-33
4	-39	.	-28	-21	-7	.	-14	-18	-38	.	-34
5	.	-39	-35	-22	-13	.	-11	-23	-33	-34	.

Tabelle 2: Beträge der Determinante (in dB) bei Parametrisierung durch die vorzeichenbehaftete Fläche

Index	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
-5	.	-44	-31	-25	-10	.	-12	-25	-35	-40	.
-4	-44	.	-26	-20	-7	.	-8	-20	-28	.	-40
-3	-31	-26	.	-21	-8	.	-3	-20	.	-28	-35
-2	-25	-20	-21	.	0	.	0	.	-20	-20	-25
-1	-10	-7	-8	0	.	.	.	0	-3	-8	-12
0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1	-12	-8	-3	0	.	.	.	0	-8	-7	-10
2	-25	-20	-20	.	0	.	0	.	-21	-20	-25
3	-35	-28	.	-20	-3	.	-8	-21	.	-26	-31
4	-40	.	-28	-20	-8	.	-7	-20	-26	.	-44
5	.	-40	-35	-25	-12	.	-10	-25	-31	-44	.

7.2 Bestimmung von 6-Freiheitsgrade-Bewegungsparametern ebener Objekte im $\mathbf{R}^3$ aus Kamera-Aufnahmen

In diesem Abschnitt wird der Versuch unternommen, aus der als bekannt angenommenen Gestalt eines ebenen Objektes und dessen Kamerabild auf die räumliche Lage (Position und Orientierung) des Objektes zu schließen. Dazu wird für die Kamera zunächst die Abbildung einer Lochkamera (projektive Abbildung) angenommen. Im nächsten Schritt werden die affine Näherung für die projektive Abbildung eingeführt und die Voraussetzungen für diese dargestellt. Schließlich werden die Gleichungen zur Rückrechnung der äußeren geometrischen Parameter aus den Parametern der affinen Abbildung angegeben. Besonderer Wert wurde auf die Darstellung von Fehlereinflüssen und Angabe der Grenzen des Einsatzbereiches dieser Anwendung gelegt.

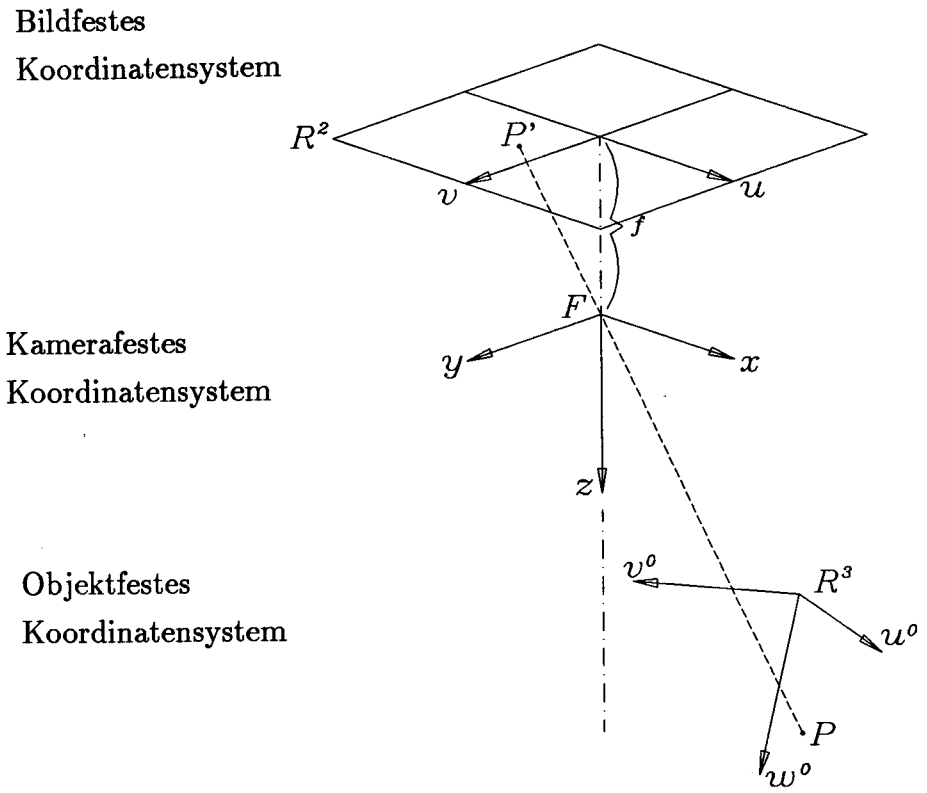

Bild 24: Zentralprojektion aus dem $\mathbf{R}^3$ in die Bildebene

Die nachfolgend genannten Koordinatensysteme sind in Bild 24 dargestellt.

- Objektfestes Koordinatensystem: u^0, v^0, w^0
  Die Koordinatenachsen u^0 und v^0 spannen die Objektebene auf.

- Kamerafestes Koordinatensystem: x, y, z
  Der Koordinatenursprung liegt im bildseitigen Brennpunkt F. Die z-Achse ist die optische Achse.

- Bildfestes Koordinatensystem: u, v
  Der Ursprung liegt auf der optischen Achse und hat vom Ursprung des kamerafesten Koordinatensystems den Abstand der Brennweite f. Die Koordinatenachsen u und v sind parallel zu den Koordinatenachsen x und y orientiert. Das bildfeste Koordinatensystem spannt die Bildebene auf.

Die Lage des objektfesten Koordinatensystems im kamerafesten System wird durch die Koordinaten x_0, y_0 und z_0 des Ursprungs des objektfesten Systems angegeben, die Orientierung des objektfesten Koordinatensystems gegenüber dem kamerafesten Koordinatensystem durch die drei Eulerschen Winkel α, ψ und ϕ.

Die Orientierung mit den Eulerschen Winkeln als Orientierungsparametern ist folgendermaßen zu deuten. Sind alle drei Winkel Null, dann sind die kamerafesten und die objektfesten Koordinaten parallel orientiert. Ausgehend von dieser Situation erfolgt eine erste Drehung um die optische Achse (Azimut: α), eine zweite quer zur optischen Achse (Schrägsichtwinkel: ψ) und eine letzte wiederum um die optische Achse (Rotation: ϕ). Schon aus der Anschauung ergibt sich, daß der Schrägsichtwinkel hier eine dominierende Rolle spielen muß, da durch schräge Ansicht eines Objektes dieses verzerrt erscheint.

Die Transformation von objektfesten in kamerafeste Koordinaten lautet:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^0 \\ v^0 \\ w^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{z-Achse} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}}_{x-Achse} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{z-Achse} .$$

Kamera-Modell: Projektive Abbildung

Für die bildfesten Koordinaten u und v des Bildpunktes P' gelten unter Zentralprojektion (siehe Bild 24) die Verhältnisgleichungen:

$$u : x = -f : z \qquad \text{und} \qquad v : y = -f : z, \qquad f \overset{def}{>} 0.$$

Hierin ist f die Brennweite des Objektivs. Daraus folgt:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit

$$\mu = -\frac{f}{z}.$$

Der Faktor μ heißt *Abbildungsmaßstab*, er ist variabel in z. Unter Berücksichtigung der Koordinatentransformation folgt daraus:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^0 \\ v^0 \\ w^0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \tag{57}$$

mit

$$\mu = \frac{-f}{a_{31}u^0 + a_{32}v^0 + a_{33}w^0 + z_0}. \tag{58}$$

Für die projektive Abbildung ebener Objekte ($w^0 = 0$) gilt daher:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^0 \\ v^0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \tag{59}$$

mit

$$\mu = \frac{-f}{a_{31}u^0 + a_{32}v^0 + z_0}. \tag{60}$$

Kamera-Modell: Affine Näherung der projektiven Abbildung

Betrachtet man die Gesamtheit aller Punkte eines ebenen Objektes, so variiert der Abbildungsmaßstab der projektiven Abbildung innerhalb eines gewissen Intervalls. Ist die Intervallbreite sehr viel kleiner als die untere Intervallgrenze, dann kann der Abbildungsmaßstab für alle Objektpunkte näherungsweise als konstant angenommen werden. In diesem Falle ist das projektive Bild eines ebenen Objekts näherungsweise ein affines Bild des Objekts.

Für die affine Näherung der projektiven Abbildung gilt:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \approx \bar{\mu} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^0 \\ v^0 \end{pmatrix} + \bar{\mu} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \qquad \text{falls } \forall \mu : \mu \approx \bar{\mu} = konst \tag{61}$$

mit der Transformationsmatrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{62}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\phi - \cos\psi\sin\alpha\sin\phi & -\sin\alpha\cos\phi - \cos\psi\cos\alpha\sin\phi \\ \cos\alpha\sin\phi + \cos\psi\sin\alpha\cos\phi & -\sin\alpha\sin\phi + \cos\psi\cos\alpha\cos\phi \end{pmatrix}, \tag{63}$$

und dem mittleren Abbildungsmaßstab

$$\bar{\mu} = \frac{-f}{a_{31}\bar{u}^0 + a_{32}\bar{v}^0 + z_0}.$$

Hierin ist $(\bar{u}^0, \bar{v}^0)$ irgendein „zentraler" Punkt in der konvexen Hülle des Objekts, z.B. der Flächenschwerpunkt, der Linienschwerpunkt, der Mittelpunkt zwischen den Randpunkten, die voneinander am weitesten entfernt sind, oder irgendeine andere Art von Mittelpunkt. Liegt dieser Punkt nahe der optischen Achse, so gilt:

$$\bar{\mu} \approx -\frac{f}{z_0}.$$

Fehlerbetrachtung

Es sei $(\bar{u}^0, \bar{v}^0)$ ein Bezugspunkt in der konvexen Hülle des Objekts. Dann gilt für jeden Objektpunkt (u^0, v^0):

$$\begin{pmatrix} u^0 \\ v^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}^0 \\ \bar{v}^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{u}^0 \\ \tilde{v}^0 \end{pmatrix}.$$

Der relative Fehler des Abbildungsmaßstabs für irgendeinen Objektpunkt ist dann:

$$\frac{\bar{\mu} - \mu}{\mu} = \frac{a_{31}\tilde{u}^0 + a_{32}\tilde{v}^0}{a_{31}\bar{u}^0 + a_{32}\bar{v}^0 + z_0} = \sin\psi\left(\frac{\tilde{u}^0}{\bar{z}}\sin\alpha + \frac{\tilde{v}^0}{\bar{z}}\cos\alpha\right).$$

Hierin ist $\bar{z}$ die z-Komponente (auf der optischen Achse) des Bezugspunktes. Ist $\hat{r}$ der größte Abstand des Objektrandes vom Bezugspunkt, dann ist der maximale relative Fehler

$$\frac{\hat{r}}{\bar{z}}\sin\psi.$$

Dieser Fehler ist „klein" bei „kleinem" Schrägsichtwinkel ($\psi \approx 0$). Er ist überdies klein, wenn das Objekt klein gegenüber seiner Entfernung zur Kamera ist.

In folgender Tabelle sind die Grenzwinkel für verschiedene Fehlerschranken in % bei verschiedenen Verhältnissen $\hat{r} : \bar{z}$ angegeben.

		Fehlerschranken			
$\hat{r}$:	$\bar{z}$	0.1%	0.2%	0.5%	1.0%
1 :	10	0.6^0	1.1^0	2.9^0	5.7^0
1 :	20	1.1^0	2.3^0	5.7^0	11.5^0
1 :	50	2.9^0	5.7^0	14.5^0	30.0^0
1 :	100	5.7^0	11.5^0	30.0^0	90.0^0

Das Beispiel weist darauf hin, daß die Berechnung des Schrägsichtwinkels aus dem Objektbild auf der Grundlage der affinen Näherung auf solche Anwendungen beschränkt ist, bei denen der Objektabstand sehr viel größer als die Objektgröße ist.

Kamera-Modell: Affine Näherung in komplexer Darstellung

In Abschnitt 7.1 wurde die Rückrechnung der komplexen Parameter der affinen Abbildung aus Fourierdeskriptoren angegeben. In diesem Abschnitt werden diese in Abhängigkeit von den äußeren Bewegungsparametern dargestellt. Um zu dieser Darstellung zu kommen, sind lediglich die Elemente der Matrix (??) entsprechend den Umrechnungsformeln (3,4 und 5) des Abschnittes 2.1.3 zu verwenden und elementar umzuformen.

$$x \approx ax^0 + bx^{0*} + c \tag{65}$$

mit

$$a = \frac{\bar{\mu}}{2}(1 + \cos\psi)e^{j(\phi+\alpha)}, \tag{66}$$

$$b = \frac{\bar{\mu}}{2}(1 - \cos\psi)e^{j(\phi-\alpha)}, \tag{67}$$

$$c = \bar{\mu}(x_0 + jy_0). \tag{68}$$

Diese Darstellung zeichnet sich durch Kompaktheit aus, die sich sowohl bezüglich der Interpretation als auch hinsichtlich der Rückrechnung auf die Bewegungsparameter günstig auswirkt. Zunächst zur Interpretation:

- Der Abbildungsmaßstab tritt als konstanter Faktor auf und bestimmt damit die Bildgröße.

- Der Schrägsichtwinkel bestimmt die Beträge von a und b. Ist $\psi = 0$ dann ist auch $b = 0$. In diesem Fall liegt eine Ähnlichkeitsabbildung vor. Wird das Objekt von der Rückseite betrachtet, dann ist $90^0 < \psi < 270^0$. In diesem Fall ist der Betrag von b größer als der von a.

- Die Drehwinkel um die optische Achse treten als Argumente der komplexen Exponentialfunktionen auf. Sie bestimmen damit den Phasenunterschied von a und b.

Rückrechnung der affinen Abbildungsparameter in 3-D Bewegungsparameter

Aus dem Kameramodell (64) in komplexer Darstellung und der Definition des mittleren Abbildungsmaßstabs folgen unmittelbar die Gleichungen zur Rückrechnung auf die 3-D Bewegungsparameter.

$$\hat{\mu} = |a| + |b|, \tag{68}$$

$$\hat{\psi} = \pm \arccos\{\frac{|a| - |b|}{|a| + |b|}\}, \tag{69}$$

$$\hat{\phi} = \begin{cases} \frac{1}{2}(\arg a + \arg b), \\ \\ \frac{1}{2}(\arg a + \arg b) + \pi, \end{cases} \tag{70}$$

$$\hat{\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{2}(\arg a - \arg b), \\ \\ \frac{1}{2}(\arg a - \arg b) + \pi, \end{cases} \tag{71}$$

$$\hat{x}_0 = \frac{1}{\hat{\mu}}\Re\{c\}, \tag{72}$$

$$\hat{y}_0 = \frac{1}{\hat{\mu}}\Im\{c\}, \tag{73}$$

$$\hat{z}_0 = \frac{-f}{\hat{\mu}} - \sin\hat{\psi}(\bar{u}^0 \sin\hat{\alpha} + \bar{v}^0 \cos\hat{\alpha}) \quad \approx \quad \frac{-f}{\hat{\mu}}. \tag{74}$$

Für die Orientierungsparameter treten insgesamt vier verschiedene Lösungen auf: zwei für $\hat{\psi}$ und zwei für das Paar $\{\hat{\phi}, \hat{\alpha}\}$. Ist $\{\hat{\phi}_1, \hat{\alpha}_1\}$ die eine, dann ist $\{\hat{\phi}_1 + \pi, \hat{\alpha} + \pi\}$ die andere Lösung. Die gemischten Lösungen in π können von vornherein ausgeschlossen werden. Die Summe aus $\hat{\phi}$ und $\hat{\alpha}$ entspricht nämlich dem Kamera-Modell nur $modulo_{2\pi}$, nicht jedoch $modulo_{\pi}$. Alle vier angegebenen Lösungen sind physikalisch sinnvoll, so daß ohne zusätzliches Wissen keine vorzuziehen ist. Dies entspricht auch der Anschauung. Beim Schrägsichtwinkel ψ bedarf dies keiner weiteren Erläuterung. Geht man gedanklich von einem Azimut α und einer Rotation ϕ aus, so erhält man zunächst ein „auf dem Kopf stehendes“ Bild gleicher Gestalt unter dem Winkel $\alpha + \pi$, welches, durch Rotation um den Winkel $\phi + \pi$, wieder in die ursprüngliche Lage gebracht wird.

Fehlerbetrachtungen

Phasenfehler in den Größen a und b wirken sich unmittelbar als Winkelfehler in den Größen $\hat{\psi}$ und $\hat{\alpha}$ aus. Insbesonders bei Aufnahmen aus fast senkrechter Richtung ($\psi \approx 0$, $\psi \approx 180^0$) besteht die Gefahr, daß der Betrag von a bzw. b so gering ist, daß unter der Wirkung von Störungen unzulässig hohe Phasenfehler auftreten. In diesem Fall können die beiden Drehbewegungen um die optische Achse nicht mehr separiert werden. Es erscheint daher zweckmäßig, in diesem Fall schon im Ansatz ersatzweise nur eine Drehbewegung Φ' anzunehmen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \Phi' &= \arg a \qquad \text{falls } \mid b \mid \approx 0, \\ \Phi' &= \arg b \qquad \text{falls } \mid a \mid \approx 0. \end{aligned}$$

Der Fehler bei der Rückrechnung des Schrägsichtwinkels hängt von den Betragsfehlern in a und b ab. Ersetzt man in (69) das Argument durch $\cos\psi + \epsilon$, wobei ϵ der resultierende Betragsfehler des Arguments ist, so ergibt sich der Schätzfehler für den Schrägsichtwinkel zu

$$\tilde{\psi} = \pm \arccos(\cos\psi + \epsilon) - \psi.$$

Graphen dieser Funktion sind in Bild 25 mit ϵ als Parameter dargestellt. Die Fehlerempfindlichkeit ist am größten bei Aufnahmen aus senkrechter Sicht. Für positive ϵ existiert ein Bereich, in dem die Rückrechnung nicht definiert ist, nämlich dann, wenn das Argument in (69) größer als Eins ist. Die Fehlerkurven klingen zunächst rasch ab und nähern sich darauf langsam der Schranke $\arccos\epsilon - \pi/2$. In den Bildern 27 und 28 wird beispielhaft die Qualität der rückgerechneten Parameter $\hat{\alpha}$ und $\hat{\psi}$ unter zufälligen Konturstörungen entsprechend Bild 26 veranschaulicht. Die fehlerfreien Parameter sind $\alpha = 10^0$ und $\psi = 10^0$ (links), $\alpha = 30^0$ und $\psi = 70^0$ (rechts). Die Bilder zeigen die Ergebnisse aus je 100 Versuchen, oben mit der abs. Fläche und unten mit der vorzeichenbehafteten Fläche als Kurvenparameter. Die Überlegenheit der zweiten Parametrisierung kommt auch hier wieder zum Ausdruck. Bei geringer Scherung ($\psi = 10^0$) ist die Streuung des Fehlers $\tilde{\alpha} = \hat{\alpha} - \alpha$ sehr groß (Bild 27 links). Sehr viel geringer ist dagegen die Streuung der Ersatzdrehbewegung Φ' (Bild 28 links). Die Qualität der geschätzten Parameter ist im Falle $\alpha = 70^0$ jeweils sehr viel besser als im Falle $\alpha = 10^0$.

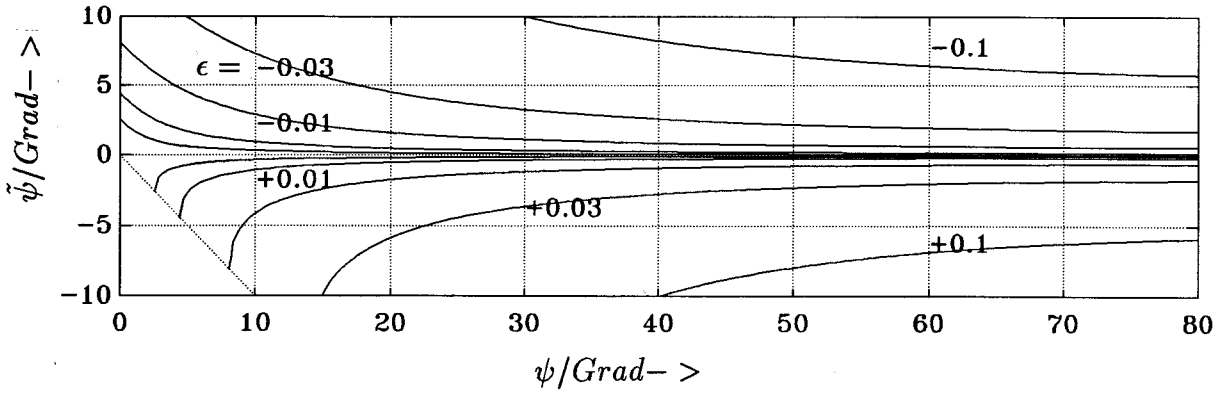

Bild 25: Fehler des Schrägsichtwinkels als Funktion des Schrägsichtwinkels. Der Parameter ist der Fehler bei der Rückrechnung des *Cosinus'* des Schrägsichtwinkels aus den affinen Parametern a und b

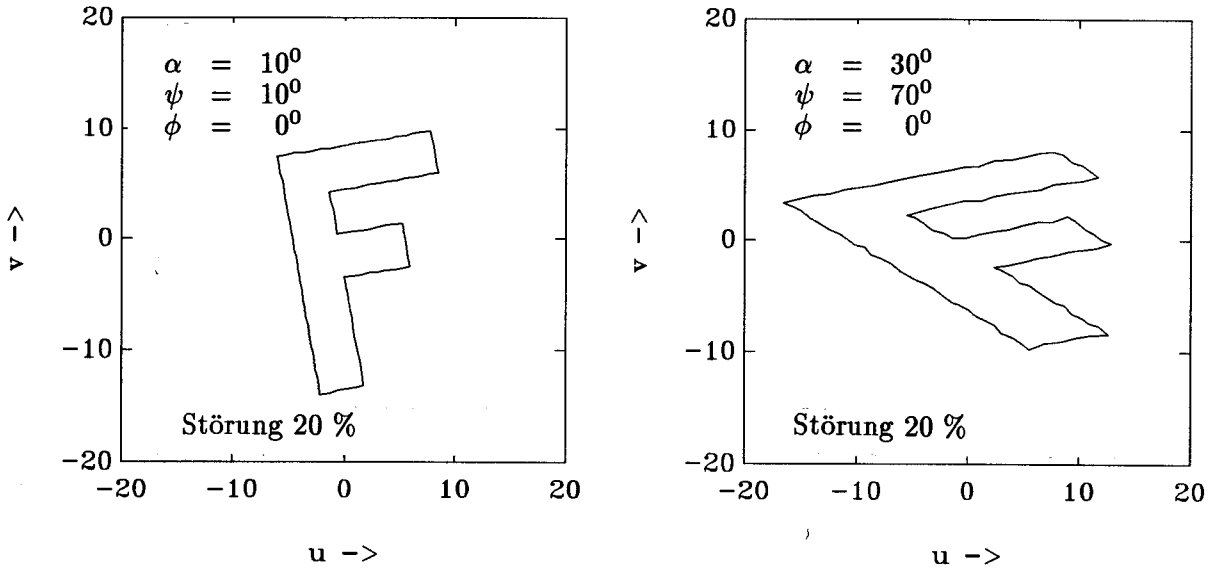

Bild 26: Beispiel für Konturstörung unter einem in u- und v-Richtung jeweils gleichverteilten Abtastfehler von 20% des Abtastintervalls

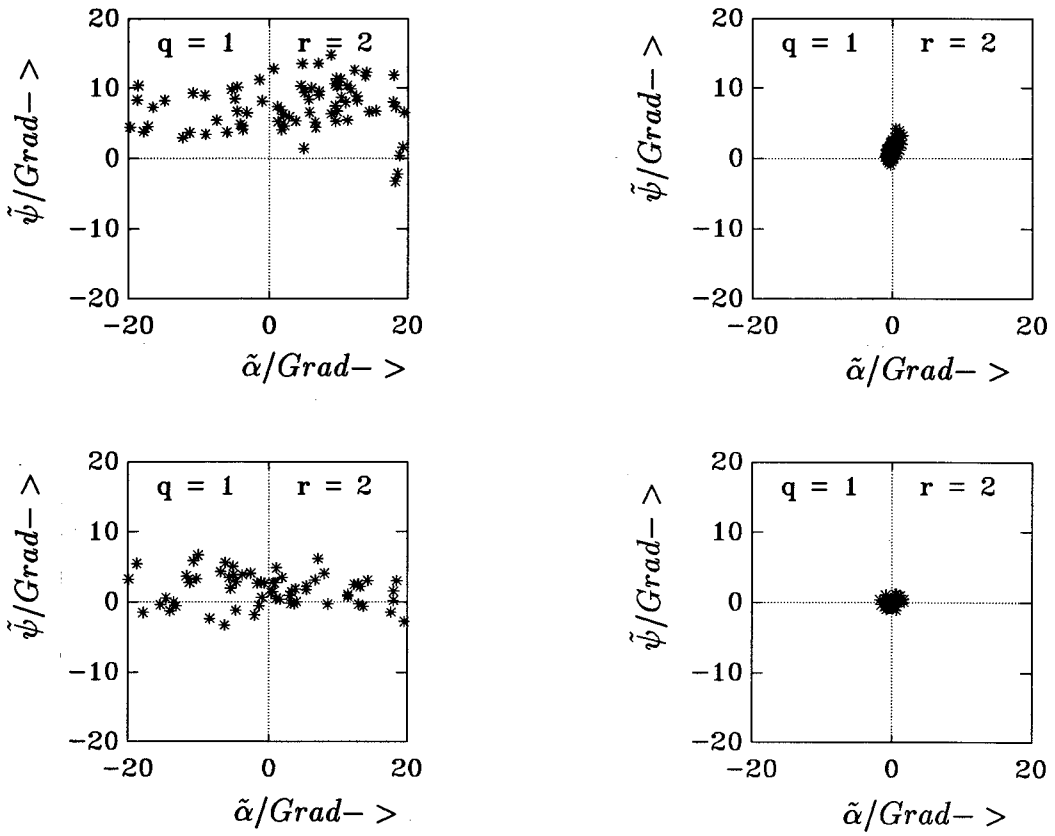

Bild 27: Fehler der rückgerechneten Kamera-Lageparameter unter Konturstörung

Störung	:	20% gleichverteilt	
Kurvenparameter	:	abs. Fläche	oben
	:	vor. Fläche	unten
Parameter-Sollwerte	:	$\alpha = 10^0, \psi = 10^0$	links
	:	$\alpha = 30^0, \psi = 70^0$	rechts

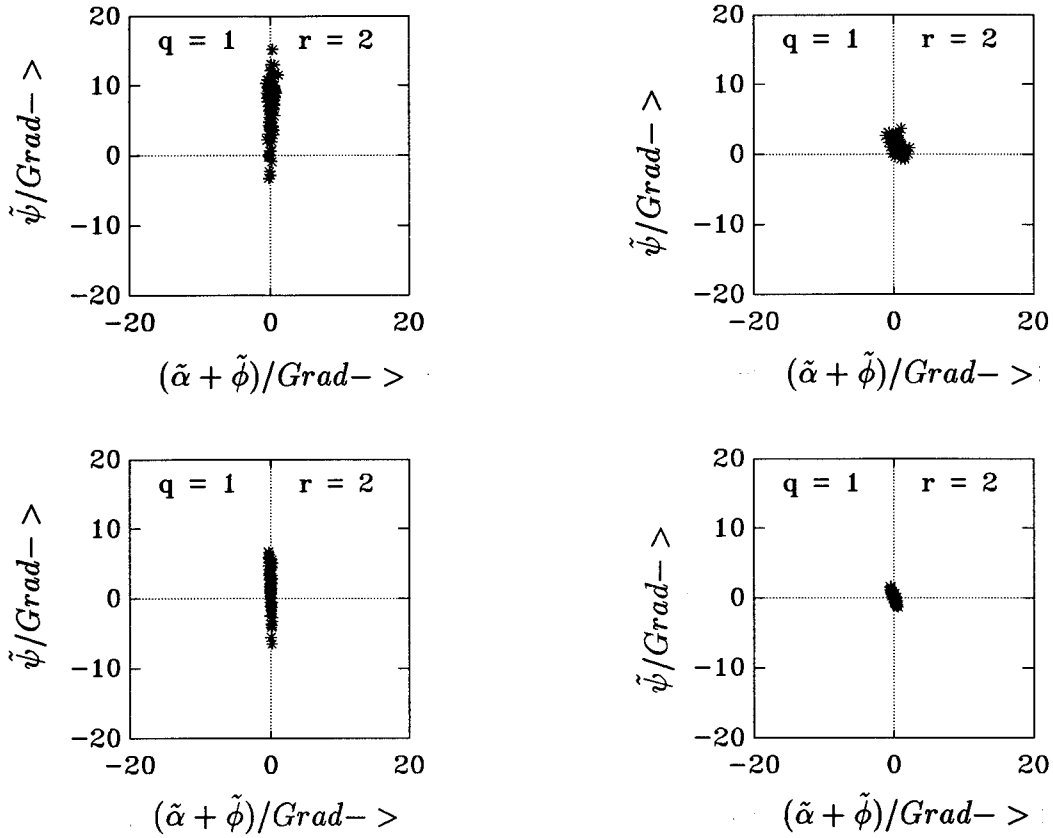

Bild 28: Fehler der rückgerechneten Kamera-Lageparameter unter Konturstörung

Störung	:	20% gleichverteilt	
Kurvenparameter	:	abs. Fläche	oben
	:	vor. Fläche	unten
Parameter-Sollwerte	:	$\alpha = 10^0, \psi = 10^0$	links
	:	$\alpha = 30^0, \psi = 70^0$	rechts

8 Fourierdeskriptoren von Polygonen

In der Literatur über Fourierdeskriptoren wird gelegentlich die Anwendung der *schnellen Fouriertransformation* (FFT [9]) herausgestellt [32,38,39]. Es ist jedoch folgendes zu berücksichtigen: Die FFT transformiert Abtastwerte bei äquidistanten Parameterschritten. Im allgemeinen fallen Abtastwerte nicht „äquidistant" in bezug auf den gewählten Parameter an. Dann ist ein Vorverarbeitungsschritt, der mit *resampling* bezeichnet wird, erforderlich. Abgesehen vom Aufwand für dessen Ausführung ist dabei das Abtastintervall so eng zu wählen, daß die Eckpunkte „hinreichend genau" getroffen werden und der mit *aliasing* benannte Fehler im Spektralbereich „hinreichend" gering ist. Unter diesen Bedingungen kann eine drastische Erhöhung des Eingangsdatenbestands erforderlich sein, ohne daß eine qualitative Verbesserung der Daten, i.a. jedoch eine Verschlechterung, die Folge ist. Ob unter Berücksichtigung der vermehrten Daten und des Vorverarbeitungsaufwandes, um diese Daten zu gewinnen, wenigstens ein Zeitvorteil zugunsten der FFT erzielt wird, bleibt im Einzelfall zu prüfen (siehe auch [21]). In dem hier behandelten Zusammenhang muß noch erwähnt werden, daß die zu transformierenden Funktionen unstetig und mehrdeutig sein können und schon deshalb nicht durch implizit äquidistante Abtastwerte dargestellt werden können, wie es die Anwendung der FFT verlangt.

Aus diesen Gründen wird hier ein Verfahren angegeben, das die im Zusammenhang mit der FFT auftretenden Probleme vermeidet. Dabei handelt es sich um Formeln zur analytischen Fouriertransformation von Polygonen unter Vorgabe von deren Eckpunkten. Polygone kommen in der Praxis häufig vor. Zumindest lassen sich Abtastwerte als Eckpunkte eines approximierenden Polygons auffassen. Ein ebenes Polygon im $\mathbf{R}^2$ habe N Eckpunkte,

$$\begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix}, \qquad i = 0, \ldots, N-1,$$

die, einem vorgegebenen Umlaufsinn entsprechend (orientiert), beginnend mit 0, numeriert sind. In Bild 29 ist ein Beispiel dargestellt. Der N-te Eckpunkt ist mit dem 0-ten identisch:

$$\begin{pmatrix} u_N \\ v_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

Der kontinuierliche Parameter t nehme an den Eckpunkten die Werte $t_0, t_1, \ldots, t_{N-1}, t_N$ an. Die Periode T ist der Wert der Parameteränderung nach einem vollen Umlauf. Es gilt:

$$T = t_N - t_0.$$

Unter der Voraussetzung, daß t beim Voranschreiten von einem Eckpunkt zum nächsten seinen Wert proportional zur zurückgelegten Strecke ändert, wird das Polygon durch

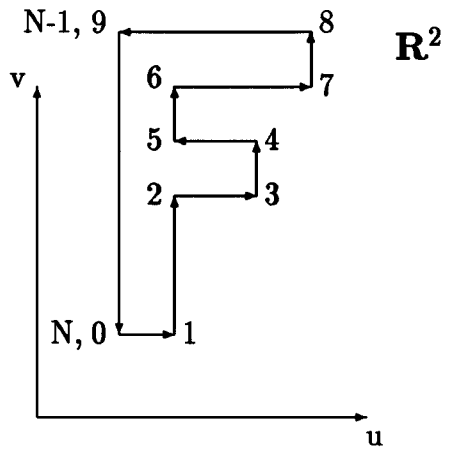

Bild 29: Beispiel eines orientierten Polygons mit N Eckpunkten

Angabe der Parameterwerte an den Eckpunkten vollständig parametrisiert. Die Voraussetzung wird hier als erfüllt angenommen. Sind die Parameterwerte zu zwei benachbarten Eckpunkten gleich, dann liegt eine Unstetigkeit vor.

8.1 Parametrisierung

Nach Abschnitt 3.1 ist für die Normierung auf affininvariante Fourierdeskriptoren die Parametrisierung der Originalfunktion von ausschlaggebender Bedeutung. Die nachfolgenden Formeln zur Berechnung der Parameterwerte an den Eckpunkten basieren auf (11) und (13) und stellen analytische Lösungen für die Spezialisierung auf Polygone dar. Die Realisierung nach (12) erhält man, indem man die Bildung des Betrags unterläßt. Es gilt:

Flächenschwerpunkt:

$$\begin{pmatrix} u_s \\ v_s \end{pmatrix} = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} (u_i v_{i+1} - u_{i+1} v_i) \begin{pmatrix} u_i + u_{i+1} \\ v_i + v_{i+1} \end{pmatrix}}{3 \sum_{i=0}^{N-1} (u_i v_{i+1} - u_{i+1} v_i)}$$

Translation:

$$\begin{pmatrix} u_i' \\ v_i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_i - u_s \\ v_i - v_s \end{pmatrix}$$

Parameter Anfangswert:

$$t_0 = \text{beliebig}$$

Vorzeichenbehaftete Fläche:

$$t_{i+1} = t_i + \frac{1}{2}(u'_i v'_{i+1} - u'_{i+1} v'_i), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$

Absolute Fläche:

$$t_{i+1} = t_i + \frac{1}{2} \mid (u'_i v'_{i+1} - u'_{i+1} v'_i) \mid, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$

Periode:

$$T = t_N - t_0$$

8.2 Fouriertransformation

Die nachfolgende Formeln sind analytische Lösungen des Fourierintegrals für ebene Polygone, d.h. sie berücksichtigen alle Punkte auf dem Polygon und nicht nur Abtastwerte. Die Punkte zwischen den Eckpunkten werden unter der Annahme, daß sie auf Geraden liegen und der o.g. Annahme über die Proportionalität des Parameters implizit berücksichtigt. In die Rechnung gehen daher tatsächlich nur die Eckpunkte mit ihren Parameterwerten ein. Es gilt:

$$\begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2T} \sum_{i=0}^{N-1} \begin{pmatrix} u_{i+1} + u_i \\ v_{i+1} + v_i \end{pmatrix} (t_{i+1} - t_i), \tag{75}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} U_k \\ V_k \end{pmatrix} &= \frac{T}{(2\pi k)^2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \begin{pmatrix} u_{i+1} - u_i \\ v_{i+1} - v_i \end{pmatrix} (E_{k,i+1} - E_{k,i}) \left[1 - \delta(t_{i+1} - t_i)\right] + \\ &+ \frac{j}{2\pi k} \sum_{i=0}^{N-1} \begin{pmatrix} u_{i+1} - u_i \\ v_{i+1} - v_i \end{pmatrix} E_{k,i}\, \delta(t_{i+1} - t_i), \qquad k \neq 0, \end{aligned} \tag{76}$$

mit

$$\begin{aligned} E_{k,i} &= \exp\{-j2\pi k t_i / T\}, \\ E_{k,i+1} &= \exp\{-j2\pi k t_{i+1} / T\}, \\ \delta(t_{i+1} - t_i) &= \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad t_{i+1} = t_i, \\ 0 & \text{falls} \quad t_{i+1} \neq t_i. \end{cases} \end{aligned}$$

Die erste Summe transformiert die stetigen Teile, sie entspricht der von Persoon und Fu angegebenen Formel [29]. Die zweite Summe transformiert die Unstetigkeiten. Auf diese darf hier nicht verzichtet werden. Die Umschaltung erfolgt durch den δ-Operator. FORTRAN-Programme findet man im Anhang E.

Diskussion

- Die Polygondarstellung durch Angabe der Eckpunkte ist *exakt* und *minimal.* Da die angegebene analytische Transformation keine äquidistanten Parameterschritte erfordert, kann mit ihr ein minimaler Datensatz transformiert werden. Die Transformation selbst ist ebenfalls *exakt* (bis auf Rundungsfehler), da sie implizit den gesamten Polygonverlauf, also auch die Punkte zwischen den Eckpunkten, transformiert.

- Abtastwerte, die auf Geraden liegen und nicht Eckpunkte sind, können in einem Vorverarbeitungsschritt eliminiert werden, da sie ja implizit in der Rechnung berücksichtigt werden. Auf diese Weise kann die Effizienz des Verfahrens bei Anwendung auf abgetastete Kurven erheblich gesteigert werden. Der Aufwand zur Beseitigung eines überflüssigen Punktes ist nämlich sehr viel geringer als der Aufwand, den dieser bei der Transformation verursacht.

- Es taucht die Frage auf, ob nicht eine Interpolation höherer als erster Ordnung besser wäre. In besonderen Fällen, z.B. wenn nur glatte Konturen vorkommen können, ist dies möglich. Im allgemeinen, wenn nicht mehr bekannt ist, als daß aufeinanderfolgende Punkte (irgendwie) verbunden sind, ist dies nicht der Fall.

- Die Formeln können auch zur Fourier-Darstellung stückweise linearer, *offener* Kurven verwendet werden, indem man die Ableitung transformiert (siehe Abschnitt 3.3). Der Eingangsdatensatz ist dazu wie folgt anzugeben:

$$\left|\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} u_1 - u_0 & u_1 - u_0 & u_2 - u_1 & u_2 - u_1 & \dots & u_N - n_{N-1} & u_1 - u_0 \\ v_1 - v_0 & v_1 - v_0 & v_2 - v_1 & v_2 - v_1 & \dots & v_N - n_{N-1} & v_1 - v_0 \\ t_0 & t_1 & t_1 & t_2 & \dots & t_N & t_N \end{array}\right|$$

Eine Approximation der offenen Kurve erhält man durch Integration der Rücktransformierten.

Herleitung der Transformationsformel (76)

Die Herleitung beruht im wesentlichen auf dem Integrationssatz der Fouriertransformation:

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \left(\frac{T}{j2\pi k}\right)^n \mathcal{F}\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\}, \qquad k \neq 0,$$

der Ausblendeigenschaft des Diracschen δ-Operators:

$$\mathcal{F}\{x(t)\delta(t-\tau)\} = \frac{1}{T}x(\tau)e^{-j2\pi\tau/T}$$

und dem Superpositionsgesetz der Fouriertransformation:

$$\mathcal{F}\{\sum_{(i)} x_i(t)\} = \sum_{(i)} \mathcal{F}\{x_i(t)\}.$$

Das Polygon

$$x(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}, \qquad 0 \leq t \leq T,$$

wird durch die Summe seiner Strecken zwischen benachbarten Punkten wie folgt dargestellt:

$$x(t) = \sum_{i=0}^{N-1} [\sigma(t-t_i) - \sigma(t-t_{i+1})] \left[\frac{x_{i+1}-x_i}{t_{i+1}-t_i}(t-t_i) + x_i\right]$$

mit

$$\sigma(.) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad (.) < 0, \\ 1 & \text{falls} \quad (.) \geq 0. \end{cases}$$

Die zweite eckige Klammer beschreibt die Gerade, die erste beschränkt diese auf die Strecke zwischen den benachbarten Punkten x_i und x_{i+1}. Die erste Ableitung hat nach der Produktregel der Differentiation zwei Summanden:

$$x'(t) = x'_A(t) + x'_B(t).$$

Für die Summanden gilt:

$$
\begin{aligned}
x'_A(t) &= \sum_{i=0}^{N-1} [\delta(t-t_i) - \delta(t-t_{i+1})] \left[\frac{x_{i+1}-x_i}{t_{i+1}-t_i}(t-t_i) + x_i\right] \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \delta(t-t_i)x_i - \delta(t-t_{i+1})x_{i+1}, \\
x'_B(t) &= \sum_{i=0}^{N-1} [\sigma(t-t_i) - \sigma(t-t_{i+1})] \left[\frac{x_{i+1}-x_i}{t_{i+1}-t_i}\right], \\
x''_B(t) &= \sum_{i=0}^{N-1} [\delta(t-t_i) - \delta(t-t_{i+1})] \left[\frac{x_{i+1}-x_i}{t_{i+1}-t_i}\right].
\end{aligned}
$$

Die Fouriertransformierten der jeweils höchsten Ableitung sind aufgrund des Superpositionsgesetzes und der Ausblendeigenschaft des Diracschen δ-Operators

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}\{x'_A(t)\} &= \frac{1}{T}\sum_{i=0}^{N-1} x_i e^{-j2\pi k t_i/T} - x_{i+1} e^{-j2\pi k t_{i+1}/T}, \\
\mathcal{F}\{x''_B(t)\} &= \frac{1}{T}\sum_{i=0}^{N-1} \left[\frac{x_{i+1}-x_i}{t_{i+1}-t_i}\right] \left[e^{-j2\pi k t_i/T} - e^{-j2\pi k t_{i+1}/T}\right].
\end{aligned}
$$

Unter Anwendung des Integrationssatzes folgt daraus für die Fouriertransformierten der Stammfunktionen x_A und x_B:

$$
\begin{aligned}
(A): \quad & \mathcal{F}\{x_A(t)\} = \frac{-j}{2\pi k}\sum_{i=0}^{N-1} x_i e^{-j2\pi k t_i/T} - x_{i+1} e^{-j2\pi k t_{i+1}/T}, && k \neq 0, \\
(B): \quad & \mathcal{F}\{x_B(t)\} = \frac{-T}{(2\pi k)^2}\sum_{i=0}^{N-1} \left[\frac{x_{i+1}-x_i}{t_{i+1}-t_i}\right] \left[e^{-j2\pi k t_i/T} - e^{-j2\pi k t_{i+1}/T}\right], && k \neq 0,
\end{aligned}
$$

und für die Originalfunktion $x(t)$ nach nochmaliger Anwendung des Superpositionsgesetzes:

$$
\mathcal{F}\{x(t)\} = \mathcal{F}\{x_A(t)\} + \mathcal{F}\{x_B(t)\}, \qquad k \neq 0.
$$

Damit ist die Transformation vollständig dargestellt. Die Ausführung der Rechnung nach dieser Formulierung würde jedoch unnötige Rechenschritte erfordern. Zur ersten Summe (A) tragen nur die Summanden bei, für die $t_i = t_{i+1}$ gilt, alle übrigen heben sich gegenseitig auf (vorausgesetzt: $x_N = x_0$). Im Gegensatz dazu sind im Falle $t_i = t_{i+1}$ die Summanden der zweiten Summe (B) Null. Die Summanden, die keinen Beitrag zum Resultat liefern, wurden in (76) zur Vermeidung überflüssiger Rechnung durch eine zusätzliche Schaltfunktion unterdrückt.

9 Bezüge zu anderen Arbeiten

9.1 Ähnlichkeitsinvariante Fourierdeskriptoren

Hier werden jeweils zunächst die Normierungen in enger Anlehnung an die Darstellung in den Arbeiten wiedergegeben und darauf in die Darstellung der vorliegenden Arbeit übertragen. Dadurch werden die formalen Bezüge zwischen den Arbeiten transparent.

Cosgriff 1960 [10]

Zitat nach [43]: „... *A starting point on the boundary is selected and a function* $\Theta(l)$ *is defined which measures angular direction of the curve as a function of arc length. After appropriate normalization this periodic function is expanded in a Fourier series ...*"

Alle Normierungen, einschließlich des Aufpunkts, erfolgen demnach im Originalbereich unter Verwendung des Tangentenwinkels. Nach [30] haben Cosgriff und andere auch mit der Krümmung zur Normierung gearbeitet. Problematisch an dieser Vorgehensweise sind die Verwendung von Ableitungen (Fehlerempfindlichkeit) und die Aufpunktsnormierung (Heuristik).

Zahn und Roskies 1972 [43]

Die Kurve wird anfänglich durch den Winkel $\Phi(l)$, den die Tangente mit der Horizontalen einschließt, als Funktion der Bogenlänge beschrieben. Darauf wird folgende Normierung angewendet:

$$\Phi^*(l) = \Phi(\frac{Ll}{2\pi}) - \Phi(0) - l, \qquad 0 \leq l \leq 2\pi.$$

Die normierte Funktion ist ähnlichkeitsinvariant (Normierung auf Umfang; Differenz von Tangentenwinkeln). Durch Subtraktion des proportionalen Anteils l wird Stetigkeit an den Rändern der Periode herbeigeführt. Diese Funktion wird fouriertransformiert. Die Aufpunktsnormierung erfolgt im Spektralraum $\{C_k = \mathcal{F}(\Phi^*(l))\}$ durch

- Bilden der Beträge: $|C_k|$,
- Normierung der Phasen: $\varphi_k^{q/g}\varphi_p^{-k/g} \qquad g = ggT(k,q)$,

und entspricht damit inhaltlich der Bildung von betragstreuen Z-Invarianten 1. Ordnung nach Kapitel 5.

Granlund 1972 [15]

Die Ortskurve $x(l)$ wird unmittelbar fouriertransformiert und sämtliche Normierungen werden im Spektralraum $\{C_k = \mathcal{F}\{x(l)\}, k \neq 0\}$ durchgeführt:

$$I_{mn} = \frac{C_{1+m}^{n/g} C_{1-n}^{m/g}}{C_1^{(m+n)/g}} \qquad g = ggT(m,n).$$

Mit den Substitutionen:

$$Q_k = C_k/C_1, \qquad n = 1-k, \qquad m = q-1.$$

erhält man die äquivalente Darstellung:

$$I_{kq} = Q_k^{(q-1)/g} Q_q^{(1-k)/g}, \qquad g = ggT(q-1, 1-k).$$

Die Q_k sind ähnlichkeitsinvariant und daher sind es auch die I_{kq}. Die I_{kq} sind nicht amplitudentreu und daher auch nicht umkehrbar. Hinsichtlich der Phasennormierung handelt es sich um AZ-Invarianten 1. Ordnung für den Sonderfall $p = 1$ (siehe Kapitel 6).

Persoon und Fu 1974,1977 [28,29]

Es wird ein Verfahren zum Konturvergleich beschrieben, bei dem im Zuge einer Optimierung die Transformationsparameter bestimmt werden. Schließlich wird ein Verfahren zur Bildung von Invarianten angegeben. (Das erste wird "Optimal Curve Matching", das zweite "Suboptimal Curve Matching" genannt. Letztere Bezeichnung ist irreführend. Mit dem Begriff Optimalität hat das vorgeschlagene Verfahren nichts zu tun.) Zur Bildung von Invarianten werden die Fourierdeskriptoren entsprechend

$$I_k = az^k C_k$$

normiert, wobei die Parameter a und z aus den Nebenbedingungen $\arg(I_1) = \arg(I_{-1}) = \pi/2$ und $|I_1 + I_{-1}| = 1$ abgeleitet werden. Eine äquivalente Normierungsvorschrift ist:

$$I_k = \frac{j|C_k|}{|C_1| + |C_{-1}|} \Phi_k [\Phi_1^{-1-k} \Phi_{-1}^{-1+k}]^{1/2}.$$

Die Invarianz bezüglich a ist unmittelbar an dem Quotienten ersichtlich. Die Normierung ist verzerrungsfrei, allerdings nicht eindeutig wegen des gebrochenen Exponenten. Insofern handelt es sich nicht um Invarianten im strengen Sinne nach Kapitel 5. Die Fixierung auf die Indizes 1 und -1 bedeutet eine wesentliche Einschränkung, da i.a. nicht beide Fourierdeskriptoren von Null verschieden sind (oder auch nur in ausreichender Qualität vorliegen). Als Beispiel sei ein Muster von 3-facher Rotationssymmetrie genannt: Ist

hier $C_1 \neq 0$, dann können von Null verschiedene Fourierdeskriptoren nur an den Stellen $\ldots -5, -2, +1, +4, +7, \ldots$ auftreten.

Richard und Hemami 1974 [32]

Es wird ein *matching*- Verfahren durch Minimierung einer im Spektralraum definierten Zielfunktion beschrieben, ähnlich wie bei Persoon und Fu.

Burkhardt 1979 [6]

Es ist s der Grad der Rotationssymmetrie. Die Normierung lautet:

$$I_k = \frac{|C_k|}{|C_p|} e^{j(\varphi_k + \alpha\varphi_r - \beta\varphi_q)}, \qquad k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

mit

$$\alpha = \frac{p-k}{q-p}, \qquad \beta = \frac{k-q}{q-p}, \qquad q = p+s.$$

Mit den Substitutionen

$$Q_k = \frac{C_k}{C_p}, \qquad \Psi_k = \arg(Q_k), \qquad q = p+s,$$

erhält man die äquivalente Darstellung:

$$I_k = |Q_k| \Psi_k \Psi_{p+s}^{(k-p)/s}, \qquad k = \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Die Q_k sind invariant bezüglich a und sind betragstreu. Die Aufpunktsnormierung ist verzerrungsfrei bezüglich der Q_k. Die Q_k können nur an den Stellen $p, p \pm 1s, p \pm 2s, \ldots$ von Null verschieden sein. An diesen Stellen ist der Exponent ganzzahlig und die Potenz daher eindeutig. An allen übrigen stört die Mehrdeutigkeit nicht, da die Beträge ohnehin Null sind. Die Normierung führt somit auf einen vollständigen Satz ähnlichkeitsinvarianter Fourierdeskriptoren. Hinsichtlich der Phasennormierung handelt es sich hier um den Sonderfall der AZ-Invarianten 1. Ordnung bei Symmetrie vom Grade s nach Kapitel 6.

Wallace und Mitchell 1980 [38], **Wallace und Wintz 1980** [39]

Hier wird die Normierung unter Verwendung der beiden betragsgrößten Fourierdeskriptoren durchgeführt. Dabei wird C_1 als grundsätzlich betragsgrößter (bei Parametrisierung entgegen dem Uhrzeigersinn) und C_p als der dem Betrage nach zweitgrößte Fourierdeskriptor betrachtet. (Es wird die Behauptung aufgestellt, daß bei kreuzungsfreien Kurven C_1 immer dominiere. Dies trifft nicht zu. Allerdings gehört C_1 in der Regel zu den betragsgrößten und ist in den für die Praxis relevanten Fällen meist tatsächlich der betragsgrößte, so daß dieser Irrtum für die Praxis von geringer Bedeutung ist.)

Hier wird, ähnlich wie bei Persoon und Fu (s.o.), die Normierung entsprechend

$$I_k = e^{j\alpha} z^k \frac{C_k}{|C_1|}$$

durchgeführt, wobei die Konstanten α und z aus den Nebenbedingungen $\arg(I_1) = \arg(I_p) = 0$ abgeleitet werden. Daraus folgt:

$$I_k = \frac{|C_k|}{|C_1|} \Phi_k [\Phi_1^{k-p} \Phi_p^{1-k}]^{1/(p-1)}.$$

Auch hier ist die Normierung verzerrungsfrei. Sie ist jedoch (p-1)-deutig. Ein Verfahren zur Auflösung der Mehrdeutigkeit wird angegeben. Dieses erfordert die Berechnung aller $|p-1|$ Lösungen und weitere Normierungsschritte. Nach Auflösung der Mehrdeutigkeit liegt ein Satz vollständiger Invarianten vor, der sich durch hohe Störfestigkeit auszeichnet. Bei der Anwendung des Verfahrens kann sich die Schwierigkeit ergeben, daß der Index p nicht eindeutig festgelegt werden kann, weil zwei oder mehrere Fourierdeskriptoren denselben Betrag oder fast denselben Betrag haben und die Rangfolge unter Fehlereinflüssen unsicher ist.

Kuhl und Giardina 1982 [18]

In dieser Arbeit werden Kurven als reelle Funktionen der Bogenlänge aufgefaßt. Ihre Komponenten $u(l)$ und $v(l)$ werden durch die reellen Fourierreihen

$$\begin{aligned} u(l) &= A_0 + \sum_{i=1}^{N} a_k \cos(2\pi kl/L) + b_k \sin(2\pi kl/L), \\ v(l) &= C_0 + \sum_{i=1}^{N} c_k \cos(2\pi kl/L) + d_k \sin(2\pi kl/L), \end{aligned}$$

approximiert. Den Anschluß an die Notation der vorliegenden Arbeit erhält man mit

$$\begin{aligned} C_k &= (a_k - d_k) + j(c_k + b_k), \\ C_{-k} &= (a_k + d_k) + j(c_k - b_k). \end{aligned}$$

Das Paar $\{C_1, C_{-1}\}$ beschreibt im Musterraum eine Ellipse (siehe Abbildung 9). Hier erfolgt die Normierung aufgrund geometrischer Überlegungen. Dazu wird die Länge und die Lage der Hauptachse sowie die Länge des Bogens vom Aufpunkt bis zum Scheitel der Ellipse aus den Koeffizienten a_1, b_1, c_1 und d_1 berechnet. Mit diesen Parametern werden die Fourierdeskriptoren bezüglich der Größe (Länge der Hauptachse), des Drehwinkels (Lage der Hauptachse) und des Aufpunktes (Bogen zum Scheitel) normiert. Diese Normierung entspricht inhaltlich der von Persoon und Fu und hat die schon angegebenen Nachteile.
(1) Sie versagt, wenn die Ellipse zum Kreis entartet ($|C_{-1}| = 0$), was keine Seltenheit ist.
(2) Sie ist nicht eindeutig (zwei Scheitel).

Crimmins 1982 [11]

Die Darstellung im Musterraum ist die auf die Bogenlänge normierte Funktion $2\pi x(l)/L$. Es werden hinreichende Bedingungen für die Äquivalenz zweier Konturen unter der Ähnlichkeitstransformation angegeben:

1. $S = \{k | k \neq 0 \text{ und } |C_k| \neq 0\}$,
2. $M = \{q \in S | r = ggT\{q - p\}, p = \text{konst} \in S\} \subset S$,
3. $|C_q| \qquad \forall q \in M$,
4. $I_{kq} = C_k^{(q-p)/r} C_q^{(p-k)/r} C_p^{(k-q)/r}, \qquad \forall q \in M, \qquad \forall k \in S.$

Hierin sind k und q variabel innerhalb der Mengen S und M. Dabei ist M eine endliche und minimale Teilmenge von S.

Es besteht eine enge Beziehung zwischen den I_{kq} nach Crimmins und denen nach Granlund (s.o.). Mit $Q_k = C_k/C_p$ erhält man

$$I_{kq} = Q_k^{(q-p)/r} Q_q^{(p-k)/r}$$

und formale Übereinstimmung für $p = 1$ und $r = g$. Crimmins empfiehlt selbst die Wahl von $p = 1$. Die Invarianten I_{kq} nehmen an den Stellen $k = q$ den Wert 1 an. Crimmins ersetzt gewissermaßen diese Angabe ohne Information durch die Invariante $|C_q|$ und erreicht dadurch einen höheren Informationsgehalt als Granlund. Ferner wird das zweidimensionale Invariantenfeld in der Richtung q auf ein Minimum beschränkt.

Uesaka 1984 [36]

Es wird ein Verfahren zur Darstellung offener Kurven angegeben. Dieses beruht auf der Fouriertransformation der komplexen Exponentialfunktion $e^{j\alpha_i}$ der Winkel α_i, welche die Seiten eines Polygons mit der reellen Achse einschließen und führt auf translations- und streckungsinvariante Fourierdeskriptoren. Die Anregung zur Darstellung offener Kurven durch periodische Funktionen unter Verwendung der ersten Ableitungen wurden dieser Arbeit entnommen.

Arbter und Burkhardt 1984 [3]

Die Fourierdeskriptoren nach Burkhardt [6] werden unter Anwendungsgesichtspunkten diskutiert. Ein Beispiel weist auf die Bedeutung der Phaseninformation hin.

9.2 Affininvariante Fourierdeskriptoren

Miyatake, Matsuyama und Nagao 1983 [22]

Die Arbeit ist auf Japanisch geschrieben. Eine Übersetzung der Zusammenfassung ins Englische [STN international] liegt vor. Aus dieser wird nachfolgend zitiert: „*The most significant questions in using Fourier decriptors, however, are: (1) affine transformation* **cannot** *be made invariantly, (2) partial curves cannot be recognized, and (3) object shape recognition is difficult. In this paper, to solve these problems, a curve recognition technique using Fourier descriptors is presented which is capable of invariant affine transformation. The technique performs iterative computation to make the subject curve close to the appropriate canonical curve.*"

Arbter 1989 [2]

Teile aus der vorliegenden Arbeit.

9.3 Momente

Grundlagen [17,40]

Die Momente der Ordnung $(p+q)$ einer Funktion $f(u,v)$ sind durch die Funktionaltransformation

$$m_{pq} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u^p v^q f(u,v) du dv, \qquad p,q = 0,1,2,\ldots$$

definiert. Hat $f(u,v)$ nur in einem endlichen Bereich der $u-v-$Ebene von Null verschiedene Werte und sind diese beschränkt, dann sind die ∞^2 vielen Momente umkehrbar eindeutig und damit eine vollständige Darstellung der Funktion $f(u,v)$. Die Voraussetzungen für die Vollständigkeit sind bei Bildvorlagen erfüllt.

Die Zentralmomente

$$\mu_{pq} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (u-\bar{u})^p (v-\bar{v})^q du dv, \qquad p,q = 0,1,2,\ldots$$

sind durch Verschiebung des Koordinatenursprungs in das Zentrum mit den Koordinaten

$$\bar{u} = m_{10}/m_{00}, \qquad \bar{v} = m_{01}/m_{00},$$

definiert. Sie sind *translationsinvariant.* Ist $f(u,v)$ ein Binärbild, dann kann der Aufwand zur Berechnung der Momente dadurch reduziert werden, daß man die Integrationsgebiete auf die Bereiche beschränkt, in denen $f(u,v)$ den Wert Eins hat. Ist $f(u,v)$ ein Konturbild, dann kann der Aufwand nochmals reduziert werden, indem man der Kontur den Funktionswert Eins zuordnet und nur über die Kontur integriert. Von beiden Möglichkeiten wurde in [33,40] Gebrauch gemacht. Der Transformationskern besteht aus ganzzahligen Potenzen der Ortskoordinaten. Daher dominieren mit zunehmender Ordnung die Randgebiete und die in ihnen auftretenden Fehler das Ergebnis. Aus diesem Grund sind nur die Momente niederer Ordnung von praktischem Wert und reichen nur zur Beschreibung schwach strukturierter Funktionen aus.

Der Verschiebung im Musterraum entspricht im Raum der Momente die Transformation:

$$\mu_{pq} = \sum_{j=0}^{q}\sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i}\binom{q}{j} (-1)^{p+q-i-j} \bar{u}^{(p-i)} \bar{v}^{(q-j)} m_{ij}.$$

Für die Momente bis zur dritten Ordnung gilt:

$$\begin{aligned}
&\mu_{00} = m_{00},\\
&\mu_{10} = \mu_{01} = 0,\\
&\mu_{20} = m_{20} - m_{10}^2, \qquad \mu_{11} = m_{11} - m_{10}m_{01}, \qquad \mu_{02} = m_{02} - m_{01}^2,\\
&\mu_{30} = m_{30} - 3m_{20}m_{10} + 2m_{10}^3, \qquad \mu_{21} = m_{21} - 2m_{11}m_{10} - m_{20}m_{01} + 2m_{10}^2 m_{01},\\
&\mu_{03} = m_{03} - 3m_{02}m_{01} + 2m_{01}^3, \qquad \mu_{12} = m_{12} - 2m_{11}m_{01} - m_{02}m_{10} + 2m_{01}^2 m_{10}.
\end{aligned}$$

Ähnlichkeitsinvariante Momente

Aus den Zentralmomenten können *rotationsinvariante* und *streckungsinvariante* Größen abgeleitet werden. In [17] werden die folgenden sechs, aus Zentralmomenten zweiter und dritter Ordnung zusammengesetzten Rotationsinvarianten, angegeben:

$$\begin{aligned}
R_1 &= \mu_{20} + \mu_{02},\\
R_2 &= (\mu_{20} - \mu_{02})^2 + 4\mu_{11}^2,\\
R_3 &= (\mu_{30} - 3\mu_{12})^2 + (3\mu_{21} - \mu_{03})^2,\\
R_4 &= (\mu_{30} + \mu_{12})^2 + (\mu_{21} + \mu_{03})^2,\\
R_5 &= (\mu_{30} - 3\mu_{12})(\mu_{30} + \mu_{12})[(\mu_{30} + \mu_{12})^2 - 3(\mu_{21} + \mu_{03})^2] +\\
&\quad (3\mu_{21} - \mu_{03})(\mu_{21} + \mu_{03})[3(\mu_{30} + \mu_{12})^2 - (\mu_{21} + \mu_{03})^2],\\
R_6 &= (\mu_{20} - \mu_{02})[(\mu_{30} + \mu_{12})^2 - (\mu_{21} + \mu_{03})^2] + 4\mu_{11}(\mu_{30} + \mu_{12})(\mu_{21} + \mu_{03}).
\end{aligned}$$

Unter der zentrischen Streckung mit dem Faktor α gilt für die Zentralmomente [17]

$$\mu'_{pq} = \alpha^{p+q+2}\mu_{pq}.$$

Die Bildung *streckungsinvarianter* Größen aus Zentralmomenten erfolgt in [17] durch Normierung auf Potenzen von μ_{00}, in [33] durch Normierung auf Potenzen von R_1. *Ähnlichkeitsinvarianz* erhält man, indem man die Streckungsinvarianten bezüglich der Rotation normiert.

Affininvariante Momente

In [40] werden *affininvariante Momente* durch Transformation des Bildes in eine kanonische Darstellung bezüglich der affinen Transformationen gebildet. Die Transformationsparameter werden aus Momenten in den Zwischenschritten errechnet.

1. Translation:

$$f'(u,v) = f(u+a, v+b) \qquad \text{mit} \qquad a = -m_{10}, \qquad b = -m_{01}.$$

2. Horizontale Scherung:

$$f''(uv) = f'(u+\beta v, v) \qquad \text{mit} \qquad \beta = -\mu'_{11}/\mu'_{02}.$$

3. Anisotrope Streckung:

$$f'''(u,v) = f''(\alpha u, \delta v) \qquad \text{mit} \qquad \alpha = \sqrt{1/\mu''_{20}} \qquad \delta = \sqrt{1/\mu''_{02}}.$$

4. Rotation:

$$f''''(u,v) = f'''(u\cos\theta + v\sin\theta, -u\sin\theta + v\cos\theta)$$

mit

$$\tan\theta = -\frac{\mu'''_{30} + \mu'''_{12}}{\mu'''_{03} + \mu'''_{21}}) : \qquad \mu''''_{03} + \mu''''_{21} < 0.$$

Die Transformationsfolge ist eine affine Transformation. Das kanonisierte Bild f'''' ist affininvariant. Also sind auch auch dessen Momente m''''_{pq} affininvariant. Hinsichtlich des Aufwandes sei bemerkt, daß das Verfahren, neben der Berechnung der Momente in jedem Schritt, Bildtransformationen erfordert. Werden die Bildtransformationen in diskreten Bildspeichern ausgeführt, dann induziert jeder Transformationsschritt außerdem noch Fehler.

9.4 Ergänzungen

Cyganski, Orr, Cott und Dodson 1987 [12]

In Analogie zur Krümmung ebener Kurven $\kappa(l) = \dot{u}\ (l)\ \ddot{v}\ (l) - \ddot{u}\ (l)\ \dot{v}\ (l)$ wird eine ***Krümmungsfunktion*** dadurch definiert, daß die Bogenlänge l durch die Affinlänge ersetzt wird. Diese Krümmungsfunktion hat unter den affinen Transformationen die invarianten Eigenschaften, wie sie für die Krümmung unter den Kongruenztransformationen bekannt sind. Hier handelt es sich somit um einen Ansatz zur Normierung im Musterraum. Allerdings ist zu bedenken, daß zur Berechnung der Affinlänge zweite Ableitungen und zur Berechnung der Krümmung nochmals zweite Ableitungen zu berechnen sind. Dadurch ist der Wert des Verfahrens für praktische Verwendung erheblich eingeschränkt.

Transformationsparameter

In [6] wird die Bestimmung der Transformationsparameter der Ähnlichkeitstransformation aus Fourierdeskriptoren angegeben.

Das in [40] angegebene Verfahren zur Bildtransformation in eine kanonische Darstellung bezüglich der affinen Transformationen (unter Verwendung von Momenten) kann zur Bestimmung der Transformationsparameter ergänzt werden. Dies folgt unmittelbar aus der Gruppeneigenschaft der affinen Transformationen.

Fouriertransformation

In [28] werden Formeln zur analytischen Berechnung der Fouriertransformierten von Polygonen bei Parametrisierung durch die Bogenlänge angegeben. Die in Kapitel 8 entwickelten Formeln schließen die nach Persoon und Fu ein, erweitern sie jedoch für die Berücksichtigung von Unstetigkeiten, wie sie bei der Parametrisierung durch Flächenparameter vorkommen können.

10 Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden Algorithmen

- zur Bildung affininvarianter Merkmale,
- zur Bestimmung affiner Transformationsparameter,
- zur Bestimmung der räumlichen Position und Orientierung,

ebener Kurven entwickelt und untersucht. Dazu werden zunächst einfache, geschlossene Kurven vorausgesetzt. Diese werden im ersten Schritt durch periodische Funktionen *geeigneter Parameter* und im nächsten durch Fourierkoeffizienten - *Fourierdeskriptoren* - dargestellt. Möglichkeiten zur entsprechenden Behandlung einfach *offener* Kurven werden aufgezeigt. Aus den Fourierdeskriptoren werden mittels *algebraischer* Normierungen bezüglich der Freiheitsgrade der affinen Transformationen und bezüglich freier Wahl des Aufpunktes affininvariante Fourierdeskriptoren abgeleitet. Dabei wird besonderes Gewicht auf die Bildung *vollständiger* Invariantensätze gelegt. Ferner wird die Bildung *gruppenspezifischer* Invarianten für Untergruppen der affinen Transformationen unter einheitlichen Gesichtspunkten angegeben. *Unabhängig* davon werden, ebenfalls auf *algebraischem* Wege, aus den Fourierdeskriptoren affiner Kurvenpaare die Transformationsparameter bestimmt. Die Anwendung zur Bestimmung der räumlichen Lage ebener Kurven wird unter dem Aspekt, daß es sich beim Bild um eine *Kameraaufnahme* handelt, erörtert. Schließlich wird auf die praktische Ausführung der *Fouriertransformation* eingegangen, und ein der Problemstellung angepaßtes Verfahren angegeben. Die Ausführungen werden durch zahlreiche Beispiele, insbesondere zum Fehlerverhalten, ergänzt. Abschließend werden die Bezüge zu anderen Arbeiten aufgezeigt.

Aus der Literatur sind die Bildung ähnlichkeitsinvarianter Fourierdeskriptoren und die Bestimmung der Transformationsparameter der Ähnlichkeitstransformation aus Fourierdeskriptoren bekannt. Die in der vorliegenden Arbeit entwickelten Verfahren sind Erweiterungen auf den Fall der affinen Transformationen und enthalten als neue Elemente: *Kurvenparameter*, die unter den affinen Transformationen *Linearität* im Spektralraum garantieren, Formeln zur *analytischen* Fouriertransformation stückweise linearer, *unstetiger* Funktionen, die *Normierung* bezüglich der Freiheitsgrade der *affinen* Transformationen, eine Verallgemeinerung der *Normierung* bezüglich des Aufpunktes, so daß *minimaler* Informationsverlust garantiert werden kann, und schließlich die Bestimmung der *Parameter der affinen Transformation* aus Fourierdeskriptoren.

Für die praktische Anwendung sind folgende Gesichtspunkte von Bedeutung. Die Kurven müssen *ganz* vorliegen. Die Verfahren eignen sich *nicht* zur Behandlung *defekter* Kurven.

Die *informationsverdichtende* Eigenschaft der Fouriertransformation in die Umgebung des spektralen Ursprungs („niederfrequente Fourierdeskriptoren") überträgt sich auf die Invarianten. In der Regel ist daher eine Vielzahl von Kurven mit nur wenigen Invarianten unterscheidbar. Die Selektivität kann durch Wahl der Anzahl der Invarianten beliebig fein eingestellt werden. Globale, unkorrelierte, gleichverteilte Fehler wirken sich im Raum der Fourierdeskriptoren und somit auch auf die Invarianten breitbandig aus. Daher sind die betragsgrößten Invarianten, die vornehmlich im niederfrequenten Bereich zu finden sind, robust gegenüber Fehlern wie sie typischerweise durch Quantisierung entstehen, sofern der Invariantenberechnung die vorzeichenbehaftete Fläche als Kurvenparameter zugrunde gelegt wird. Die Anpassung an eine konkrete Aufgabe hinsichtlich eines Kompromisses zwischen Selektivität und Störsicherheit ist mit *nur einem* Parameter, nämlich der Anzahl der zur Auswertung kommenden Invarianten, leicht einstellbar. Das Fehlerverhalten der Fourierdeskriptoren überträgt sich auch auf die rückgerechneten affinen Transformationsparameter. Für die Parameterbestimmung wird ein Kriterium zur Auswahl geeigneter Fourierdeskriptoren unter Fehlergesichtspunkten angegeben. Die Rückrechnung der räumlichen Lage ebener Objekte aus deren Kamerabild unterliegt der wesentlichen Beschränkung, daß das Kamerabild bei idealer Abbildung ein projektives Bild der Vorlage ist und nur unter bestimmten Voraussetzungen, und dann auch nur näherungsweise, ein affines Bild. Sieht man von dieser Beschränkung ab, dann sind unter dem Einfluß von Störungen nur dann zuverlässige Winkelwerte zu erwarten, wenn die Objektebene und die Kameraebene erheblich gegeneinander geneigt sind.

Der algorithmische Aufwand der Verfahren ist vergleichsweise gering. Er wird wesentlich durch die Ausführung der 1-D-Fouriertransformation bestimmt. Das angegebene Transformationsverfahren zeichnet sich unter anderm dadurch aus, daß es nur einen minimalen Eingabedatensatz benötigt und es erlaubt gezielt nur die Fourierdeskriptoren zu berechnen, die danach zur Invariantenbildung bzw. Parameterbestimmung benötigt werden.

Die Anwendung der Invarianten zur Wiedererkennung ebener Objekte aus ihrem Kamerabild unter schräger Sicht wurde auf der Deutschen Industriemesse, Hannover 1988, unter Verwendung eines Personal Computers und in FORTRAN geschriebener Programme demonstriert [4]. Dabei wurde, einschließlich der Konturermittlung, der Invariantenberechnung, der Klassifikation und der zur Demonstration erforderlichen Anzeigen, ein Erkennungstakt von etwa einer Sekunde erreicht.

Anhang

A Fourierkoeffizienten affiner Kurven

Sei

$$x(t(t^0)) = Ax^0(t^0))$$

und

$$\begin{aligned} t(t^0) &= \mu(t^0 + \tau), \\ T &= \mu T^0. \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T}\oint_C x(t)e^{-j2\pi kt/T}dt &= \frac{1}{\mu T^0}\oint_{C^0} Ax^0(t^0)e^{-j2\pi k\mu(t^0+\tau)/\mu T^0}\mu dt^0 \\ &= e^{-j2\pi k\tau/T^0}A\frac{1}{T^0}\oint_{C^0} x^0(t^0)e^{-j2\pi kt^0/T^0}dt^0. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = z^k A\mathcal{F}\{x^0(t^0)\},$$

mit

$$z = e^{-j2\pi k\tau/T^0}.$$

B Zulässige Parameter und ihre Differentiale

Es sei $\mathcal{C}$ ein affines Bild von $\mathcal{C}^0$. Ferner seien ξ und η zwei Parameterskalen und $\xi(\eta)$ sei analytisch. Außerdem seien

$$x(\xi) = \begin{pmatrix} u(\xi) \\ v(\xi) \end{pmatrix}$$

bzw. $x(\eta)$ analytische Funktionen. Kurz: Alle nachfolgend angegebenen Ableitungen sollen existieren. Die ersten drei Ableitungen von x nach ξ werden mit $x_\xi, x_{\xi\xi}$ und $x_{\xi\xi\xi}$ bezeichnet, die $n-$te Ableitung mit $x_\xi^{(n)}$. Für das Außenprodukt $[x_1, x_2]$ zweier Vektoren

$$x_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad x_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

gilt:

$$[x_1, x_2] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = u_1v_2 - v_1u_2.$$

Satz 11 *Das* Außenprodukt $[x_\xi^{(n)}, x_\xi^{(m)}]$ $n, m \neq 0$ *ist affininvariant bis auf den konstanten Faktor* $\mid A \mid$.

$$[x_\xi^{(n)}, x_\xi^{(m)}] = \mid A \mid [x_\xi^{0(n)}, x_\xi^{0(m)}].$$

Satz 12 *Das* Außenprodukt $[x(\xi), x_\xi^{(m)}]$ $m \neq 0$ *ist unter den* homogenen *affinen Transformationen invariant bis auf den konstanten Faktor* $\mid A \mid$.

$$[x(\xi), x_\xi^{(m)}] = \mid A \mid [x^0(\xi), x_\xi^{0(m)}] \qquad \text{falls} \qquad x(\xi) = Ax^0(\xi).$$

Satz 13 *Die* Außenprodukte *zweier aufeinanderfolgender Ableitungen sind bei wechselnden Parametern zueinander proportional. Der Proportionalitätsfaktor ist die* $(2n+1)-te$ *Potenz der Ableitung des neuen Parameters* ξ *nach dem alten Parameter* η.

$$[x_\eta^{(n)}, x_\eta^{(n+1)}] = \xi_\eta^{2n+1} [x_\xi^{(n)}, x_\xi^{(n+1)}].$$

Satz 14 *Das Differential* $\sqrt[2n+1]{[x_\xi^{(n)}, x_\xi^{(n+1)}]}\, d\xi$ *ist* absolut parameterinvariant.

$$\sqrt[2n+1]{[x_\xi^{(n)}, x_\xi^{(n+1)}]}\, d\xi = \sqrt[2n+1]{[x_\eta^{(n)}, x_\eta^{(n+1)}]}\, d\eta.$$

Satz 15 *Unter den affinen Transformationen* $x(\xi(\eta)) = Ax^0(\eta) + x_0$ *bei verschiedener Parametrisierung des Originals und des Bildes gilt:*

$$dt(\xi) = \sqrt[2n+1]{[x_\xi^{(n)}, x_\xi^{(n+1)}]}\, d\xi = \sqrt[2n+1]{\mid A \mid}\, \sqrt[2n+1]{[x_\eta^{0(n)}, x_\eta^{0(n+1)}]}\, d\eta. = \sqrt[2n+1]{\mid A \mid}\, dt^0(\eta).$$

Die Differentiale dt *und* dt^0 *sind parameterinvariant und sind zueinander proportional. Der Proportionalitätsfaktor ist* $\sqrt[2n+1]{\mid A \mid}$.

Beweise der Sätze 11 bis 15

Beweis zu Satz 11

Es sei

$$x(\xi) = Ax^0(\xi) + x_0.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} x_\xi &= Ax^0_\xi, \\ x_{\xi\xi} &= Ax^0_{\xi\xi}, \\ x_{\xi\xi\xi} &= Ax^0_{\xi\xi\xi}. \\ &\dots \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} [x_\xi^{(n)}, x_\xi^{(m)}] &= [Ax_\xi^{0(n)}, Ax_\xi^{0(m)}] \qquad n, m \neq 0 \\ &= \mid A \mid [x_\xi^{0(n)}, x_\xi^{0(m)}], \qquad \textbf{q.e.d.}\ . \end{aligned}$$

Beweis zu Satz 12

$$\begin{aligned} [x(\xi), x_\xi^{(m)}] &= [Ax^0(\xi) + x_0, Ax_\xi^{0(m)}], \qquad m \neq 0, \\ &= [Ax^0(\xi), Ax_\xi^{0(m)}] + [x_0, Ax_\xi^{0(m)}], \\ &= [Ax^0(\xi), Ax_\xi^{0(m)}] \qquad \text{falls} \qquad x_0 = 0, \\ &= \mid A \mid [x^0(\xi), x_\xi^{0(m)}] \qquad \text{falls} \qquad x_0 = 0, \qquad \textbf{q.e.d.}\ . \end{aligned}$$

Beweis zu Satz 13

Es sei

$$x(\eta) = x(\xi(\eta)),$$

dann gilt:

$$\begin{aligned} x_\eta &= x_\xi \xi_\eta, \\ x_{\eta\eta} &= x_{\xi\xi}\xi_\eta^2 + x_\xi \xi_{\eta\eta}, \\ x_{\eta\eta\eta} &= x_{\xi\xi\xi}\xi_\eta^3 + 3x_{\xi\xi}\xi_\eta\xi_{\eta\eta} + x_\xi\xi_{\eta\eta\eta}, \\ &\dots \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_\eta^{(n)} &= x_\xi^{(n)}\xi_\eta^n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_\xi^{(i)}, \\
x_\eta^{(n+1)} &= x_\xi^{(n+1)}\xi_\eta^{n+1} + x_\xi^{(n)} b_n + \sum_{i=1}^{n-1} b_i x_\xi^{(i)}.
\end{aligned}
$$

Die beiden Summenterme in der $n-$ten und (n+1)-ten Ableitung sind linear abhängig und liefern daher keinen Beitrag zum Außenprodukt. Ferner sind die Terme mit der $n-$ten Ableitung nach ξ zueinander proportional. Daher liefert der Term $x_\xi^{(n)} b_n$ ebenfalls keinen Beitrag zum Außenprodukt. Daraus folgt, daß nur die Ableitungen der jeweils höchsten Ordnung den Wert des Außenprodukts bestimmen. Daher gilt:

$$
[x_\eta^{(n)}, x_\eta^{(n+1)}] = [x_\eta^{(n)}\xi_\eta^n, x_\eta^{(n+1)}\xi_\eta^{n+1}] = \xi_\eta^{2n+1}[x_\xi^{(n)}, x_\xi^{(n+1)}], \qquad \text{q.ed. .}
$$

Beweis zu Satz 14

Dazu betrachte man die im Satz 13 angegebene Beziehung zwischen Außenprodukten bei Parameterwechsel und denke sich auf beiden Seiten die $(n+1)-$te Wurzel. Dann steht ξ_η in der ersten Potenz. Nun werden beide Seiten mit $d\eta$ erweitert, wobei rechts die Beziehung $d\eta = \xi_\eta d\xi$ eingesetzt wird. Dann gilt:

$$
\sqrt[2n+1]{[x_\eta^{(n)}, x_\eta^{(n+1)}]}\, d\eta = \sqrt[2n+1]{[x_\xi^{(n)}, x_\xi^{(n+1)}]}\, \xi_\eta \eta_\xi d\xi = \sqrt[2n+1]{[x_\xi^{(n)}, x_\xi^{(n+1)}]}\, d\xi, \qquad \text{q.e.d. .}
$$

Beweis zu Satz 15

Satz 15 folgt unmittelbar aus den Sätzen 11 und 14.

Affinlänge

Das Integral

$$
t = \int_C \sqrt[3]{[x_\xi, x_{\xi\xi}]}\, d\xi
$$

heißt Affinlänge [23]. Sie ist *parameterinvariant* und wird unter den affinen Transformationen *linear* transformiert. Ihr Differential ist offensichtlich das zulässige Parameterdifferential von niedrigster, nämlich zweiter Differentiationsordnung. Nach Satz 15 gilt:

$$
\int_C \sqrt[3]{[x_\xi, x_{\xi\xi}]}\, d\xi = \sqrt[3]{|\, A \,|} \int_C \sqrt[3]{[x_\eta^0, x_{\eta\eta}^0]}\, d\eta
$$

C Flächenparameter

Satz 16 : *Das Differential* $dt = \frac{1}{2}[x(\xi), x_\xi]d\xi$ *ist parameterinvariant.*

Sei

$$x(\xi) = x(\eta(\xi)).$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} x_\xi &= x_\eta \eta_\xi, \\ d\xi &= \xi_\eta d\eta. \end{aligned}$$

Mit $\eta_\xi \xi_\eta = 1$ folgt daraus:

$$[x(\xi), x_\xi]d\xi = [x(\eta), x_\eta]\eta_\xi \xi_\eta d\eta = [x(\eta), x_\eta]d\eta, \qquad \textbf{q.e.d.}\ .$$

Satz 17 : *Unter der affinen Transformation* $x(\xi) = Ax^0(\xi)$ *sind die Differentiale*

$$\begin{aligned} dt &= \frac{1}{2}[x^0(\xi), x^0_\xi]d\xi, \\ dt^0 &= \frac{1}{2}[x^0(\xi), x^0_\xi]d\xi \end{aligned}$$

zueinander proportional.

Es gilt:

$$[x(\xi), x_\xi] = [Ax^0(\xi), Ax^0_\xi] = \mid A \mid [x^0(\xi), x^0_\xi].$$

Daraus folgt:

$$dt = \mid A \mid dt^0, \qquad \textbf{q.e.d.}\ .$$

Satz 18 : *Für den Flächenschwerpunkt einer Kurve* C *gilt unabhängig von einer ursprünglichen Parameterskala* ξ*:*

$$x_S = \frac{2}{3}\frac{\oint_C x(\xi)[x(\xi), x_\xi]d\xi}{\oint_C [x(\xi), x_\xi]d\xi}.$$

Der Vektor x vom Koordinatenursprung zu der Kurve und das infinitesimal kleine Linienelement dx auf der Kurve schließen ein dreieckförmiges Gebiet der Fläche

$$dF = \frac{1}{2}[x, dx]$$

ein. Dessen Schwerpunkt liegt an der Stelle $\frac{2}{3}x$. Den Flächenschwerpunkt der Kurve erhält man durch Integration der mit dF gewichteten Schwerpunkte der Flächenelemente und Normierung auf die gesamte Fläche. Daher gilt:

$$x_S = \frac{1}{F}\oint_C \frac{2}{3}x(\xi)dF(\xi) = \frac{2}{3}\frac{\oint_C x(\xi)[x(\xi), x_\xi]d\xi}{\oint_C x(\xi), x_\xi d\xi}, \qquad \textbf{q.e.d.}\ .$$

Satz 19 : *Die affine Abbildung bildet Flächenschwerpunkte aufeinander ab.*

Zur Vereinfachung der Notation wird definiert:

$$x = x(\xi), \qquad \dot{x} = x_\xi = \frac{dx}{d\xi}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\oint [x, \dot{x}]d\xi &= \mid A \mid \oint [x^0, \dot{x}^0]d\xi = 2 \mid A \mid F^0 \\
\oint x[x, \dot{x}]d\xi &= \oint (Ax^0 + b)[Ax^0 + b, A\dot{x}^0]d\xi \\
&= \oint Ax^0[Ax^0, A\dot{x}^0]d\xi + \\
&\quad \oint Ax^0[b, A\dot{x}^0]d\xi + \\
&\quad \oint b[Ax^0, A\dot{x}^0]d\xi + \\
&\quad \oint b[b, A\dot{x}^0]d\xi \\
&= A \mid A \mid \oint x^0[x^0, \dot{x}^0]d\xi + \mid A \mid F^0 b + 2 \mid A \mid F^0 b + 0 \\
&= A \mid A \mid \oint x^0[x^0, \dot{x}^0]d\xi + 3 \mid A \mid F^0 b \\
x_S &= A\frac{2 \mid A \mid}{3 \mid A \mid}\frac{\oint x^0[x^0, \dot{x}^0]d\xi}{\oint [x^0, \dot{x}^0]d\xi} + \frac{2}{3}\frac{3}{2}\frac{\mid A \mid}{\mid A \mid}\frac{F^0}{F^0}b = Ax_S^0 + b, \qquad \textbf{q.e.d.}\ .
\end{aligned}$$

D Lineare diophantische Gleichungen

Nach: [26,20,1].

Ist $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ein Polynom in $x_1, \ldots, x_n$ mit ganzzahligen Koeffizienten, so bezeichnet man jede Gleichung $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c$ mit $n \geq 2$ als *diophantische Gleichung* [2], wenn man verlangt, sie in ganzen Zahlen zu lösen. Jede lineare diophantische Gleichung mit n Unbekannten

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots a_nx_n = c, \qquad n \geq 2$$

ist genau dann lösbar, wenn der größte gemeinsame Teiler g der Koeffizienten $a_1, \ldots, a_n$ auch c teilt.

Definitionen:

$$\begin{array}{ll} g & \stackrel{def}{=} (a_1, a_2, \ldots, a_n) \stackrel{def}{=} ggT(a_1, a_2, \ldots, a_n) \\ g|c & \text{bedeutet: „}g\text{ ist Teiler von }c\text{“} \\ g \not| c & \text{bedeutet: „}g\text{ ist nicht Teiler von }c\text{“} \end{array}$$

Ist die Gleichung lösbar, so hat sie unendlich viele Lösungen. Diese können durch n lineare Gleichungen mit zusammen $n-1$ ganzzahligen Parametern und einer partikulären Lösung ausgedrückt werden.

Beispiel: Die Gleichung

$$6x + 4y = 2, \qquad x, y \in \mathbf{Z},$$

hat offensichtlich eine Lösung $x = 1, y = -1$, aber auch x=11, y=-16 und andere. Alle Lösungen sind darstellbar mit

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2m, \\ y &= -1 - 3m, \\ m &= 0, \pm 1, \pm 2, \ldots . \end{aligned}$$

Dagegen hat die Gleichung

$$6x + 4y = 3, \qquad x, y \in \mathbf{Z}$$

keine Lösung. Aus $y = 0.75 - 1.5x$ folgt nämlich, daß y für jedes ganzzahlige x nicht ganzzahlig ist. Dies hängt offensichtlich mit den Teilern der Zahlen 6,4 und 3 zusammen.

[2] nach DIOPHANTOS von Alexandria

D.1 Der Euklidische Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers ganzer Zahlen

Es sei $a \geq b$. Andernfalls sind nachfolgend die Rollen von a und b vertauscht.

$$\begin{aligned}
r_0 &= a \quad \mathrm{mod} b, \\
r_1 &= b \quad \mathrm{mod} r_0, \\
r_2 &= r_0 \quad \mathrm{mod} r_1, \\
&\vdots \\
r_{m-1} &= r_{m-2} \quad \mathrm{mod} r_{m-1} = g = (a, b), \\
r_m &= r_{m-2} \quad \mathrm{mod} r_{m-1} = 0.
\end{aligned}$$

Der letzte von Null verschiedene Rest ist der größte gemeinsame Teiler von a und b.

D.2 Die lineare diophantische Gleichung mit zwei Unbekannten

$$ax + by = c, \qquad a, b \in \mathbf{Z}\backslash 0, \qquad g = (a, b). \tag{77}$$

Die Gleichung ist genau dann ganzzahlig lösbar, wenn $g|c$, und hat dann unendlich viele Lösungen. Ist x_0, y_0 irgendeine Lösung (partikuläre Lösung), so sind alle Lösungen mit nur einem Parameter m darstellbar:

$$x = x_0 + m(b/g), \tag{78}$$

$$y = y_0 - m(a/g). \tag{79}$$

Wenn (77) lösbar ist, dann ist auch die diophantische Gleichung

$$ax + by = g \tag{80}$$

lösbar. Ist x_0', y_0' eine Lösung dieser Gleichung, dann ist

$$x_0 = x'(c/g), \tag{81}$$

$$y_0 = y'(c/g), \tag{82}$$

eine Lösung der Gleichung (77). Zur Bestimmung aller Lösungen von (77) reicht es somit aus, zunächst eine Lösung für (80) aufzusuchen. Dazu gibt es einen systematischen Weg, der auf dem Euklidischen Algorithmus aufbaut. Dieser wird nachfolgend dargestellt.

Es sei $g = (a, b)$. Sind a und b zwei ganze Zahlen mit $a > 0$ und $\mid a \mid \geq \mid b \mid$, dann gibt es ganze Zahlen q und r, so daß $a = bq + r, 0 \leq r < b$ gilt. Gilt $b \not| a$, so genügt r der strengen Ungleichung $0 < r < b$. Der „Quotient" q und der „Rest" r sind dabei eindeutig bestimmt. Die Zerlegung heißt „Divisionsalgorithmus". Durch wiederholte Anwendung des Divisionsalgorithmus' erhält man eine Folge von Gleichungen, in der g als letzter, nicht verschwindender Rest auftritt (siehe Euklidischer Algorithmus). Die dabei anfallenden Quotienten werden anschließend zur Bestimmung einer partikulären Lösung benutzt. Zunächst gilt:

$$\begin{array}{lllllll} a & = & b & \cdot\ q_1 & +\ r_1\ , & 0 < r_1 < b & , \\ b & = & r_1 & \cdot\ q_2 & +\ r_2\ , & 0 < r_2 < r_1 & , \\ r_1 & = & r_2 & \cdot\ q_3 & +\ r_3\ , & 0 < r_3 < r_2 & , \\ & \vdots & & & & & \\ r_{m-2} & = & r_{m-1} & \cdot\ q_m & +\ g\ , & 0 < g < r_{m-1} & , \\ r_{m-1} & = & r_m & \cdot\ q_{j+1} & +\ 0. & & \end{array} \tag{83}$$

Werte für x_0 und y_0 kann man durch Elimination der Reste, beginnend mit der vorletzten Gleichung, bestimmen. Man erhält dabei für g einen linearen Ausdruck in a und b, dessen Koeffizienten eine partikuläre Lösung darstellen. Der Eliminationsprozeß kann in einer Folge von Gleichungen, welche sich auch für die praktische Berechnung gut eignet, zusammenfassend dargestellt werden.

Bestimmung einer partikulären Lösung

$$\left.\begin{array}{lll} A_{-2} & = & 0 \\ A_{-1} & = & 1 \\ A_i & = & q_{m-i}A_{i-1} + A_{i-2} \quad : \quad i = 0, 1, \ldots, m-1 \\ & & \\ x_0 & = & (-1)^{m+1}(c/g)A_{m-2} \\ y_0 & = & (-1)^m(c/g)A_{m-1} \end{array}\right\} \tag{84}$$

Beispiel: Lösung der diophantischen Gleichung $24x + 9y = 6, \quad x, y \in \mathbf{Z}$.

$$\begin{array}{lll} 24 & = & 9 \cdot 2 + 6, \qquad \Rightarrow\ q_1 = 2, \\ 9 & = & 6 \cdot 1 + 3, \qquad \Rightarrow\ q_2 = 1, \\ 6 & = & 3 \cdot 2 + 0, \qquad \Rightarrow\ g = 3, \quad m = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} A_{-2} & = & 0 \\ A_{-1} & = & 1 \\ A_0 & = & q_2 = 1, \qquad \Rightarrow\ x_0 = (-1)^{2+1}(6/3) \cdot 1 = -2 \\ A_1 & = & q_1 \cdot A_0 + A_{-1} = 2 \cdot 1 + 1 = 3, \quad \Rightarrow\ y_0 = (-1)^2(6/3) \cdot 3 = +6 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{lllll} x & = & -2+(9/3)m & = -2+3m \\ y & = & +6-(24/3)m & = +6-8m \end{array}\right\} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

D.3 Die lineare diophantische Gleichung mit n Unbekannten

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{n-2}x_{n-2} + a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n = c, \qquad (a_1, a_2, \ldots a_n)|c$$

Die diophantische Gleichung mit n Unbekannten kann durch schrittweises Auflösen von Gleichungen mit zwei Unbekannten gelöst werden. Jede Teilsumme kann nur ganzzahlige Vielfache des ggT der Koeffizienten der Teilsumme bilden.

Sei:

$$g_i = (a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

Dann gilt:

$$\begin{array}{lllllll} a_1x_1 & + & g_2y_2 & = & c & \Rightarrow & x_1, \quad y_2 \\ a_2x_2 & + & g_3y_3 & = & y_2 & \Rightarrow & x_2, \quad y_3 \\ & & & \vdots & & \Rightarrow & \vdots \quad \vdots \\ a_{n-1}x_{n-1} & + & g_ny_n & = & y_{n-1} & \Rightarrow & x_{n-1}, \quad y_n = x_n. \end{array} \tag{85}$$

Dabei reicht es aus, zunächst jeweils eine partikuläre Lösung aufzusuchen. Alle übrigen Lösungen können durch die partikuläre Lösung und Linearkombinationen der a_i in $n-1$ Parametern ausgedrückt werden.

E FORTRAN-Programme

```
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C
C     TRSPKT:: Translation des Koordinatenursprungs in den
C              Flaechenschwerpunkt, und Festlegung des Umlaufsinnes
C              des Polygons, so dass die eingeschlossene Flaeche ein
C              positives Vorzeichen erhaelt.
C
C     X   ...  N+1 komplexe Funktionswerte; das Feld wird ueberschrieben
C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC

      SUBROUTINE TRSPKT (X,N)
      COMPLEX    X(0:N), S, XXXX

C     Bestimmung des Flaechenschwerpunkts

      F  = 0.
      S  = 0.
      DO 1 I=0,N-1
      U1 = REAL(X(I))
      U2 = REAL(X(I+1))
      V1 = AIMAG(X(I))
      V2 = AIMAG(X(I+1))
      FI = (U1*V2-U2*V1)/2.
      S  = S +FI*(X(I)+X(I+1))/3.
      F  = F +FI
    1 CONTINUE
      S  = S/F
      DO 2 I=0,N

C     Verschiebung um Flaechenschwerpunkt

    2 X(I)=X(I)-S

C     RETURN bei positivem Umlaufsinn

      IF (F.GT.0.) RETURN

C     Umsortieren bei negativem Umlaufsinn, und RETURN

      DO 3 I=0,N/2
      XXXX   = X(I)
      X(I)   = X(N-I)
3     X(N-I) = XXXX
      RETURN
      END
```

```
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C
C     PARAM::  Bestimmung des Funktionsparameters
C
C     T    ... Funktionsparameter
C     T0   ... Vorgegebener Anfangswert
C     X    ... N+1 komplexe Funktionswerte
C     IPAR ... Funktionsparameter Typ
C              = 1 : Bogenlaenge ueber dem Polygon X
C              = 2 : Abs. Flaeche unter dem Fahrstrahl zwischen
C                    Koordinatenursprung und Polygon.
C              = 3 : Flaeche (vorzeichenbehaftet) unter dem Fahrstrahl
C                    zwischen Koordinatenursprung und Polygon.
C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC

      SUBROUTINE PARAM (T, T0, X, IPAR, N)
      COMPLEX    X, DX
      DIMENSION  X(0:N), T(0:N)

      GOTO (30,40,50), IPAR

C     Bogenlaenge

   30 T(0) = T0
      DO  31 I=0,N-1
      DX   = X(I+1)-X(I)
      D    = SQRT(REAL(DX*CONJG(DX)))
   31 T(I+1) = T(I)+D
      RETURN

C     Abs. Flaeche

   40 T(0) = T0
      DO  41 I=0,N-1
      U1 = REAL(X(I))
      U2 = REAL(X(I+1))
      V1 = AIMAG(X(I))
      V2 = AIMAG(X(I+1))
      D  = ABS(U1*V2-U2*V1)/2.
   41 T(I+1) = T(I)+D
      RETURN

C     Flaeche (vorzeichenbehaftet)

   50 T(0) = T0
      DO  51 I=0,N-1
      U1 = REAL(X(I))
      U2 = REAL(X(I+1))
      V1 = AIMAG(X(I))
      V2 = AIMAG(X(I+1))
      D  = (U1*V2-U2*V1)/2.
   51 T(I+1) = T(I)+D
      RETURN
      END
```

```
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C
C     F O U R A N :: Fourierkoeffizienten von Polygonen
C                    (stueckweise linearer Funktionen).
C
C     S    ... 2M*1 komplexe Fourierkoeffizienten
C     X    ... N+1  komplexe Funktionswerte
C     T    ... N+1  Funktionsparameterwerte
C
C     Voraussetzung:
C
C     Das Eingabefeld muss so belegt sein, dass gilt: X(N)=X(0).
C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC

      SUBROUTINE FOURAN (S, X, T, M, N)
      COMPLEX    S,  X, DX
      COMPLEX    AP, AM, BP, BM, E0P, E0M, E1P, E1M, DEL
      DIMENSION  S(-M:M), X(0:N), T(0:N)
      PARAMETER  (ZP=6.28318530718)

      PER  = T(N)-T(0)

C     Fourierkoeffizient S(0)

   10 S(0) = CMPLX(0.,0.)
      DO 20 I=0,N-1
      S(0) = S(0)+(T(I+1)-T(I))*(X(I+1)+X(I))
   20 CONTINUE
      S(0) = S(0)/(2.*PER)

      A0  = PER/(ZP*ZP)
      B0  = 1./(ZP)
      P0  = ZP/PER

C     Fourierkoeffizienten S(K): K#0

      DO 40 K=1,M
      XK  = 1.*K
      PK  = P0*XK
      PH  = PK*T(0)
      E1P = CMPLX(COS(PH),-SIN(PH))
      E1M = CONJG(E1P)
      AP  = CMPLX(0.,0.)
      BP  = CMPLX(0.,0.)
      AM  = CMPLX(0.,0.)
      BM  = CMPLX(0.,0.)

      DO 30 I=0,N-1
      DX  = X(I+1)-X(I)
      DT  = T(I+1)-T(I)
      IF(DT.NE.0.) GOTO 25

      BP  = BP + DX*E1P
      BM  = BM + DX*E1M
      GOTO 30
```

```
   25 PH  = PK*T(I+1)
      E0P = E1P
      E0M = E1M
      E1P = CMPLX(COS(PH),-SIN(PH))
      E1M = CONJG(E1P)
      DX  = DX/DT
      AP  = AP + DX*(E1P-E0P)
      AM  = AM + DX*(E1M-E0M)

   30 CONTINUE

      S( K) = A0/(XK*XK)*AP - CMPLX(0.,B0/XK)*BP
      S(-K) = A0/(XK*XK)*AM + CMPLX(0.,B0/XK)*BM
   40 CONTINUE

      RETURN
      END

CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C
C     F O U R S Y :: Fouriersynthese
C
C     X ... N+1  komplexe Funktionswerte
C     S ... 2M+1 komplexe Fourierkoeffizienten
C
C     Anmerkung: Fuer die Synthese wird intern ein Parameter durch
C     Aufteilung des Intervalls von 0 bis 2*pi in N gleich grosse
C     Teilintervalle gebildet.
C
C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC

      SUBROUTINE FOURSY (X, S, N, M)
      COMPLEX    X, S, XI, EX
      DIMENSION  X(0:N), S(-M:M)
      A0 = 6.2831853/N
      DO 20 I=0,N
      AI = A0*I
      XI = S(0)
      DO 10 K=1,M
      PH = AI*K
      EX = CMPLX(COS(PH),SIN(PH))
   10 XI = XI+S(K)*EX+S(-K)*CONJG(EX)
      X(I)=XI
   20 CONTINUE
      RETURN
      END
```

Schrifttum

[1] *Kleine Enzyklopädie Mathematik.* Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/M., 1980.

[2] K. Arbter. Affine-invariant Fourier descriptors. In Simon J.C., editor, *From Pixels to Features*, North-Holland, Amsterdam, 1989.

[3] K. Arbter, H. Burkhardt. Ein Beitrag zur Anwendung von Fourierdeskriptoren für die lage- und größeninvariante Objekterkennung. *Z. Flugwiss. Weltraumforsch.*, ZFW 8(Heft 1), 1984.

[4] K. Arbter, H. Burkhardt. Mustererkennung von Binär- und Graubildern. Exponate auf der Deutschen Industriemesse Hannover 1988 in Zusammenarbeit mit der Fa. Nixdorf Computer AG Paderborn.

[5] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew. *Taschenbuch der Mathematik.* Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/M., 1966.

[6] H. Burkhardt. *Transformationen zur lageinvarianten Merkmalgewinnung.* Habilitationsschrift, Universität Karlsruhe. *Fortschritt-Bericht (Reihe 10, Nr. 7) der VDI-Zeitschriften,* VDI -Verlag, Düsseldorf, 1979.

[7] N. Canterakis. Ermittlung von vollständigen, lageinvarianten Merkmalen von zweidimensionalen Grautonmustern mittels Fourier-Deskriptoren. In *Tagungsband des Kolloquiums des DFG-Schwerpunktprogramms: Digitale Signalverarbeitung*, Göttingen, 1981.

[8] D. Casasent, D. Psaltis. New optical transforms for pattern recognition. In *Proc. IEEE*, 1977.

[9] J.W. Cooley, J.W. Tukey. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Math. of Computation*, 297–301, 1965.

[10] R.L. Cosgriff. *Identification of shape.* Technical Report, Ohio State Univ. Res. Foundation, Columbus, Rep. 820-11, ASTIA AD 254 792, Dec. 1960.

[11] T.R. Crimmins. A complete set of Fourier descriptors for two-dimensional shapes. *IEEE Trans.*, MC-12(6):848–855, 1982.

[12] D. Cyganski, T.A. Cott, J.A. Orr, R.J. Dodson. Object identification and orientation estimation from contours based on an affine invariant curvature. In *Intelligent Robots and Computer Vision: Sixth in a Series*, SPIE, 1987.

[13] N. Diehl. *Methoden zur allgemeinen Bewegungsschätzung in Bildfolgen.* Dissertation, Technische Universität Hamburg. *Fortschritt-Bericht (Reihe 10, Nr. 92) der VDI-Zeitschriften,* VDI -Verlag, Düsseldorf, 1988.

[14] F.A. Fischer. *Einführung in die statistische Übertragungstheorie. B·I· Hochschultaschenbuch Band 130/130a,* Bibliographisches Institut AG, Mannheim, 1969.

[15] G.H. Granlund. Fourier preprocessing for hand print character recognition. *IEEE Trans. Computers,* C-21:195–201, 1972.

[16] W. Hättrich, G. Winkler. *Standardmethoden der Bildverarbeitung - Teil 2.* Fraunhofer-Institut für Informations- und Datenverarbeitung, Karlsruhe, 1982.

[17] M.-K. Hu. Visual pattern recognition by moment invariants. *IRE Trans. on Information Theory,* 179–187, Feb. 1962.

[18] F.P. Kuhl, C.R. Giardina. Elliptic Fourier features of a closed contour. *IEEE Trans.,* CGIP-18:236–258, 1982.

[19] R. Lenz. *Ein Verfahren zur Schätzung der Parameter geometrischer Bildtransformationen.* Dissertation, Technische Universität München, 1986.

[20] J.H. McClellan, C.M. Rader. *Number Theory in Signal Processing.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs New Jersey, 1979.

[21] O.R. Mitchell, T.A. Grogan. Shape descriptors of object boundaries for computer vision. In *Proc. SPIE Int. Soc. Opt. Eng.,* 1984.

[22] T. Miyatake, T. Matsuyama, M. Nagao. Affine transform invariant curve recognition using Fourier descriptors. *Trans. Inf. Process. Soc. Japan,* 24(1):64–71, 1983.

[23] J. Naas, H.L. Schmid. *Mathematisches Wörterbuch.* Akademie-Verlag GmbH, Berlin Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1964.

[24] H. Niemann. *Klassifikation von Mustern.* Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[25] H. Niemann. *Methoden der Mustererkennung.* Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt am Main, 1974.

[26] I. Niven, H.S. Zuckermann. *Einführung in die Zahlentheorie. B·I· Hochschultaschenbücher, Bde. 46/47,* Bibliographisches Institut AG, Mannheim, 1976/1985.

[27] T. Pavlidis. *Structural Pattern Recognition.* Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[28] E. Persoon, K.-S. Fu. Shape discrimination using Fourier descriptors. In *Proc. 2nd IJCPR*, 126–130, 1974.

[29] E. Persoon, K.-S. Fu. Shape discrimination using Fourier descriptors. *IEEE Trans.*, SMC-7(3):170–179, 1977.

[30] W.K. Pratt. *Digital Image Processing.* Wiley & Sons, New York, 1978.

[31] H. Reitboeck, T.P. Brody. A transform with invariance under cyclic permutation for applications in pattern recognition. *Information and Control*, 15:130–154, 1969.

[32] C.W. Richard, H. Hemami. Identification of three-dimensional objects using Fourier descriptors of the boundary curve. *IEEE Trans.*, SMC-4:371–378, 1974.

[33] S.A.Dudani, K.J.Breeding, R.B.McGhee. Aircraft identification by moment invariants. *IEEE Trans. on Comp.*, C-26(1), 1977.

[34] I. Schur. *Vorlesungen über Invariantentheorie.* Springer-Verlag, Berlin, 1968.

[35] K. Strubecker. *Differentialgeometrie. Sammlung Göschen Band 1113/1113a*, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1955.

[36] Y. Uesaka. A new Fourier descriptor applicable to open curves. *Electronics and Communications in Japan*, 67(8):1–10, 1984.

[37] F.M. Wahl. *Digitale Bildsignalverarbeitung.* Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[38] T.P. Wallace, O.R. Mitchell. Analysis of three-dimensional movement using Fourier descriptors. *IEEE Trans.*, PAMI-2(6), 1980.

[39] T.P. Wallace, P.A. Wintz. An efficient three-dimensional aircraft recognition algorithm using normalized Fourier descriptors. *Comp. Graph. Image Proc.*, 13:99–126, 1980.

[40] K.-P.W. Wang. *Affine-Invariant Moment Method of Three Dimensional Object Identification.* PhD thesis, Syracuse University, U.S.A., 1977.

[41] H. Wechsler. Invariance in pattern recognition. *Advances in Electronics and Physics*, 69:261–321, 1987.

[42] R. Weitzenböck. *Invariantentheorie.* Groningen, 1923.

[43] C.T Zahn, R.Z. Roskies. Fourier descriptors for plane closed curves. *IEEE Trans. Computers*, C-21:269–281, 1972.