

# Die zweidimensionale translationsinvariante Transformation $\mathbb{C}T_{2D}$

Die zweidimensionale Translation läßt sich faktorisieren in zwei eindimensionale Translationen bzgl. aller Zeilen und Spalten.

$$\tau_{i,j}(\mathbf{X}) = \tau_{s_i} \circ \tau_{z_j} \circ \mathbf{X} = \tau_{z_j} \circ \tau_{s_i} \circ \mathbf{X}$$

dabei bedeuten:

$\tau_{s_i}$  eine zyklische Permutation aller Spalten um  $i$  Plätze

$\tau_{z_j}$  eine zyklische Permutation aller Zeilen um  $j$  Plätze

Daraus folgt aber unmittelbar, daß man eine zweidimensionale Transformation der Klasse  $\mathbb{C}T_{2D}$  dadurch erhält, dass man zuerst alle Spalten und danach alle Zeilen eindimensional invariant transformiert  $\mathbb{C}T_{zs}$ , oder umgekehrt  $\mathbb{C}T_{sz}$  (Indizes sind von rechts nach links zu lesen!):

$$\mathbb{C}T_{zs}(\tau_{ij}(\mathbf{X})) = \mathbb{C}T_{zs}(\mathbf{X})$$

und ebenso:

$$\mathbb{C}T_{sz}(\tau_{ij}(\mathbf{X})) = \mathbb{C}T_{sz}(\mathbf{X})$$

Beweis:

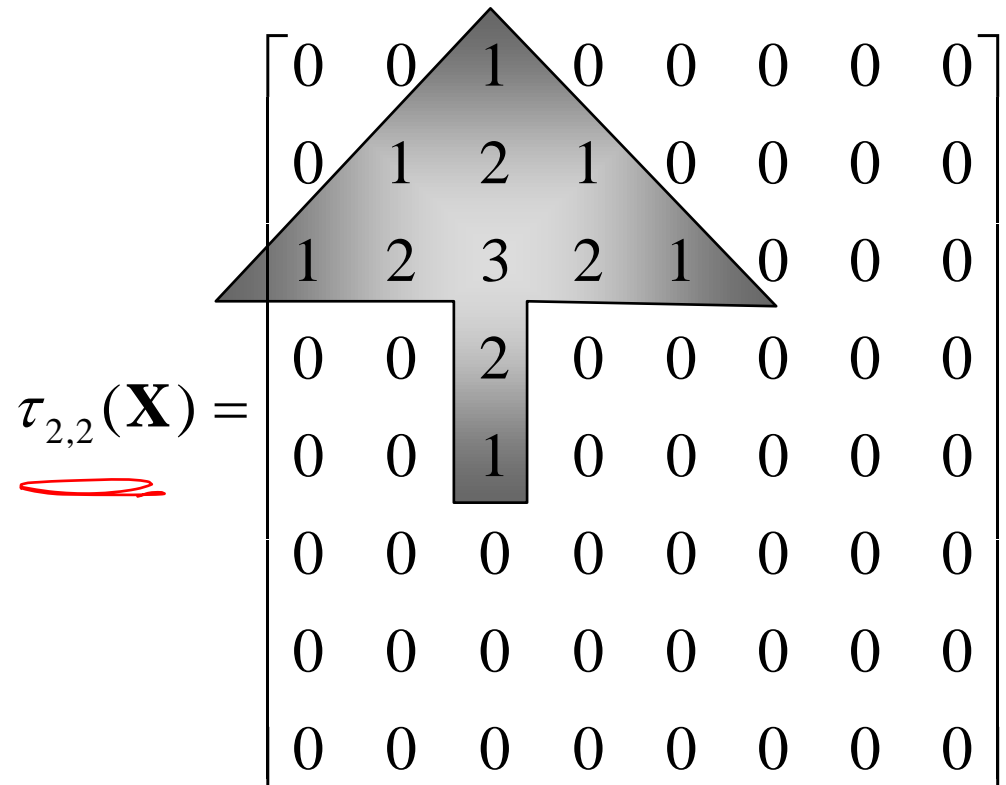
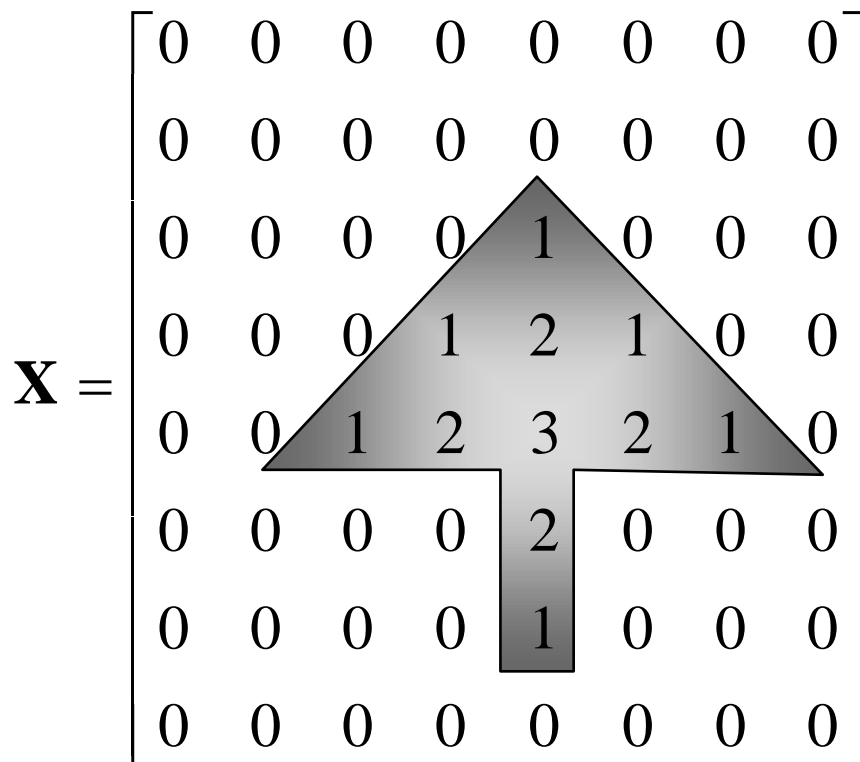
$$\begin{aligned} \mathbb{C}T_{zs}(\tau_{ij}(\mathbf{X})) &= \mathbb{C}T_z \circ \underbrace{\mathbb{C}T_s \circ \tau_{s_i} \circ \tau_{z_j}}_{=\mathbb{C}T_s \text{ (1D-Inv.)}} \circ \mathbf{X} = \mathbb{C}T_z \circ \underbrace{\mathbb{C}T_s \circ \tau_{z_j}}_{\text{vertauschbar}} \circ \mathbf{X} \\ &= \underbrace{\mathbb{C}T_z \circ \tau_{z_j}}_{\mathbb{C}T_z} \circ \mathbb{C}T_s \circ \mathbf{X} = \mathbb{C}T_z \circ \mathbb{C}T_s \circ \mathbf{X} = \mathbb{C}T_{zs}(\mathbf{X}) \quad \clubsuit \end{aligned}$$

Entsprechend kann der Beweis für  $\mathbb{C}T_{sz}$  geführt werden.

Zu beachten ist jedoch insbesondere i.allg. die Eigenschaft:

$$\mathbb{C}T_{zs}(\mathbf{X}) \neq \mathbb{C}T_{sz}(\mathbf{X})$$

# Zwei gegeneinander verschobene Grauwertmuster



# Invariante R-Transformierte

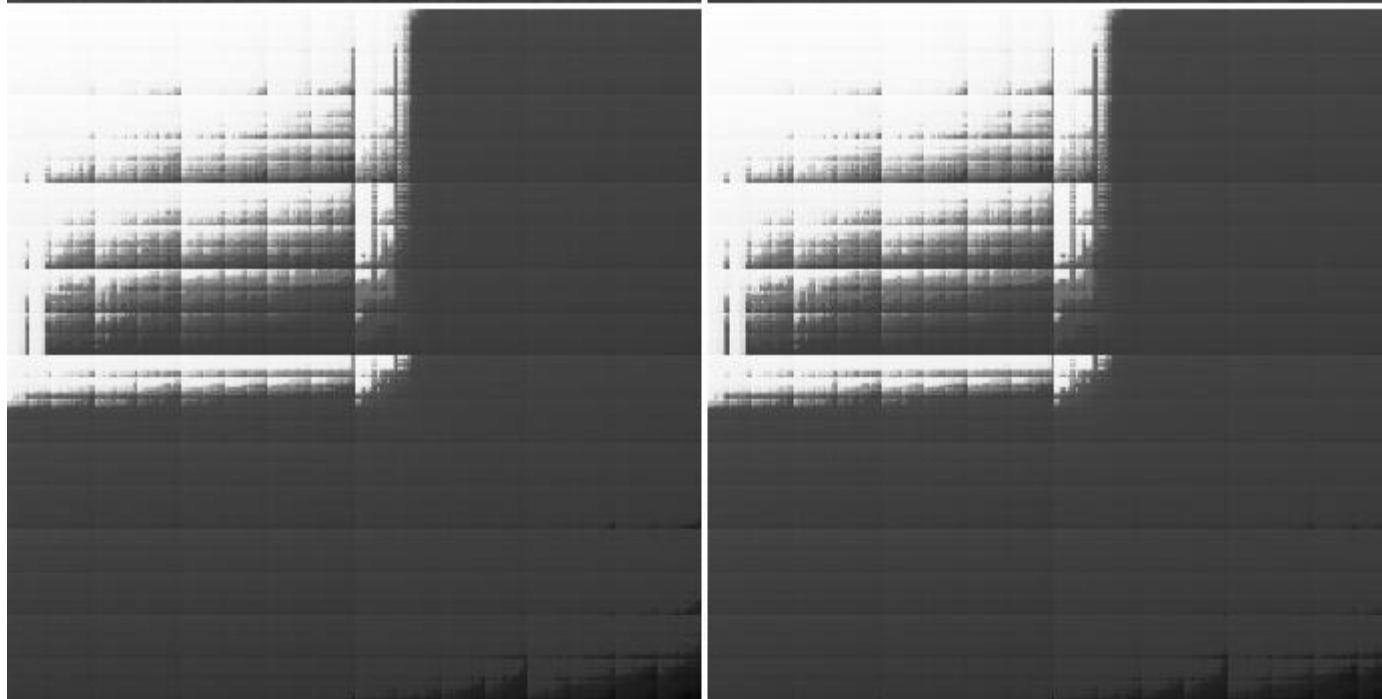
$$\tilde{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 17 & 5 & 7 & 7 & 15 & 3 & 9 & 9 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 & 1 & 7 & 5 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 15 & 3 & 5 & 5 & 13 & 1 & 7 & 7 \\ 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 11 & 1 & 1 & 1 & 9 & 3 & 3 & 3 \\ 7 & 3 & 1 & 1 & 5 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \widetilde{(\tau_{2,2}(\mathbf{X}))} = \begin{bmatrix} 17 & 5 & 7 & 7 & 15 & 3 & 9 & 9 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 & 1 & 7 & 5 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 15 & 3 & 5 & 5 & 13 & 1 & 7 & 7 \\ 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 11 & 1 & 1 & 1 & 9 & 3 & 3 & 3 \\ 7 & 3 & 1 & 1 & 5 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

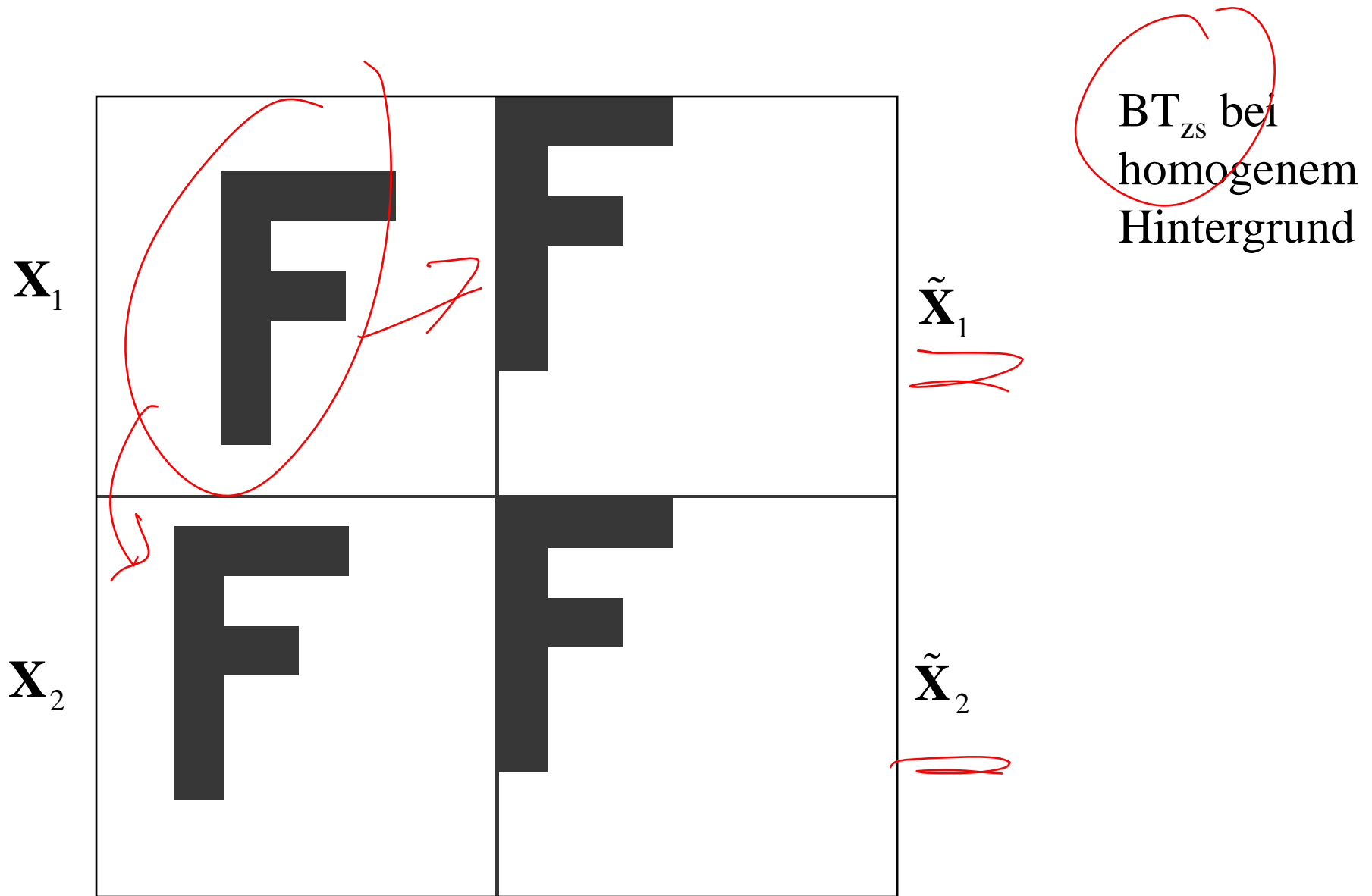
# Invariante B-Transformierte

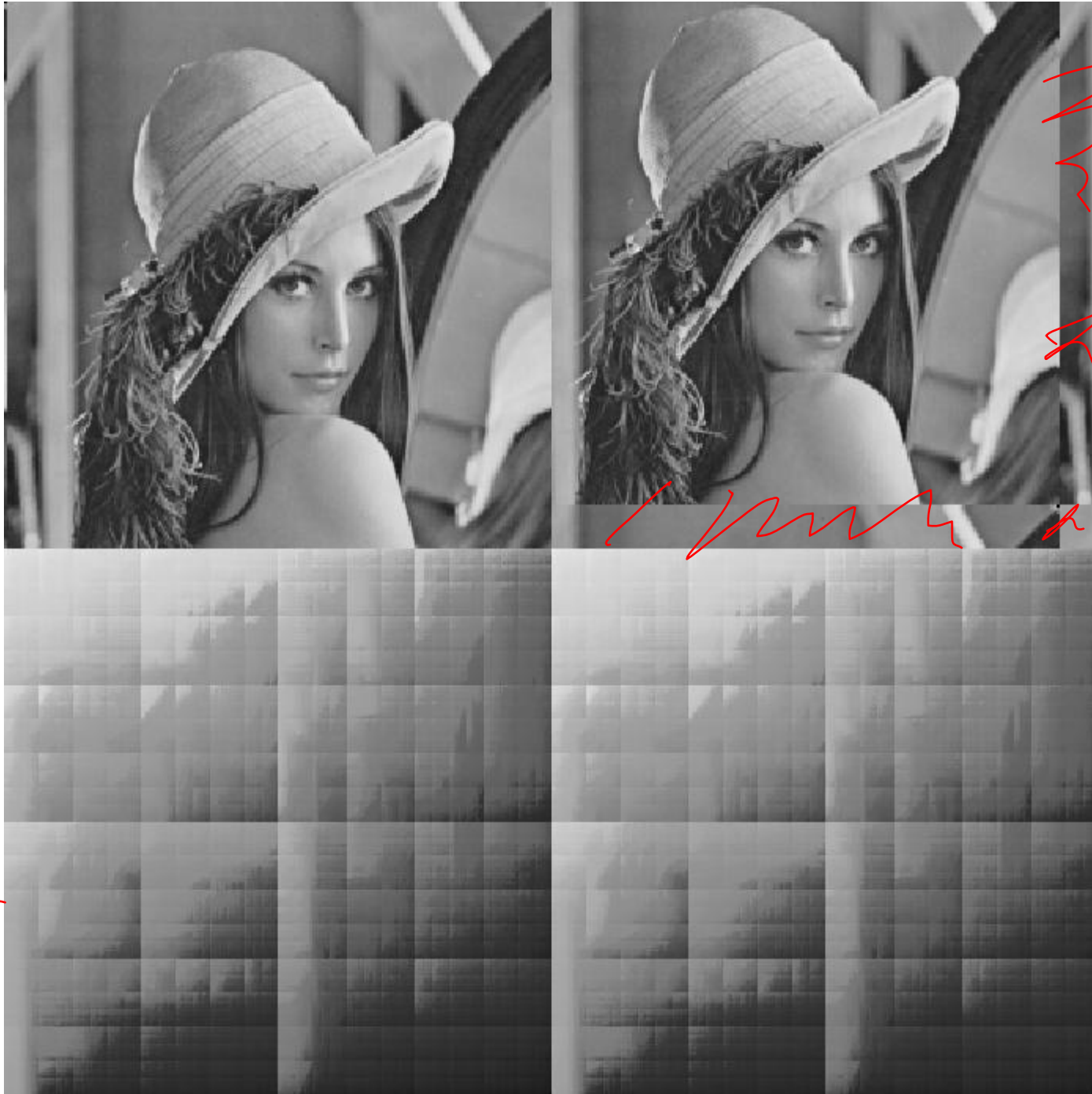
$$\tilde{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \widetilde{(\tau_{2,2}(\mathbf{X}))} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$



MT<sub>zs</sub> bei  
homogenem  
Hintergrund

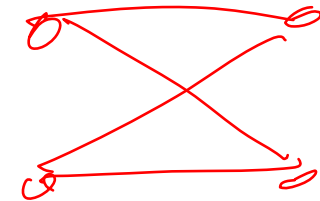






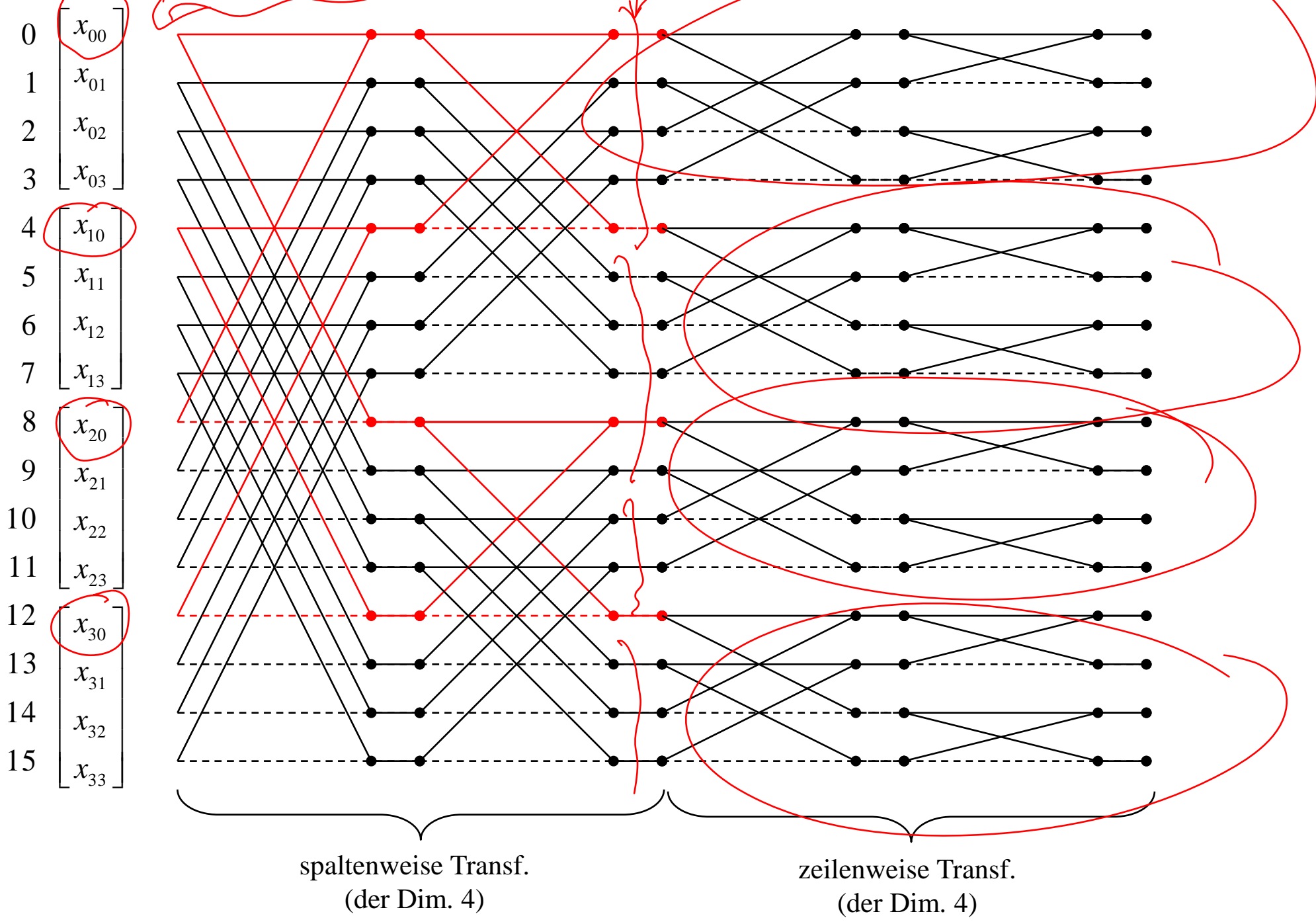
$MT_{zs}$  bei  
inhomogenem  
Hintergrund

(Len(n)a)

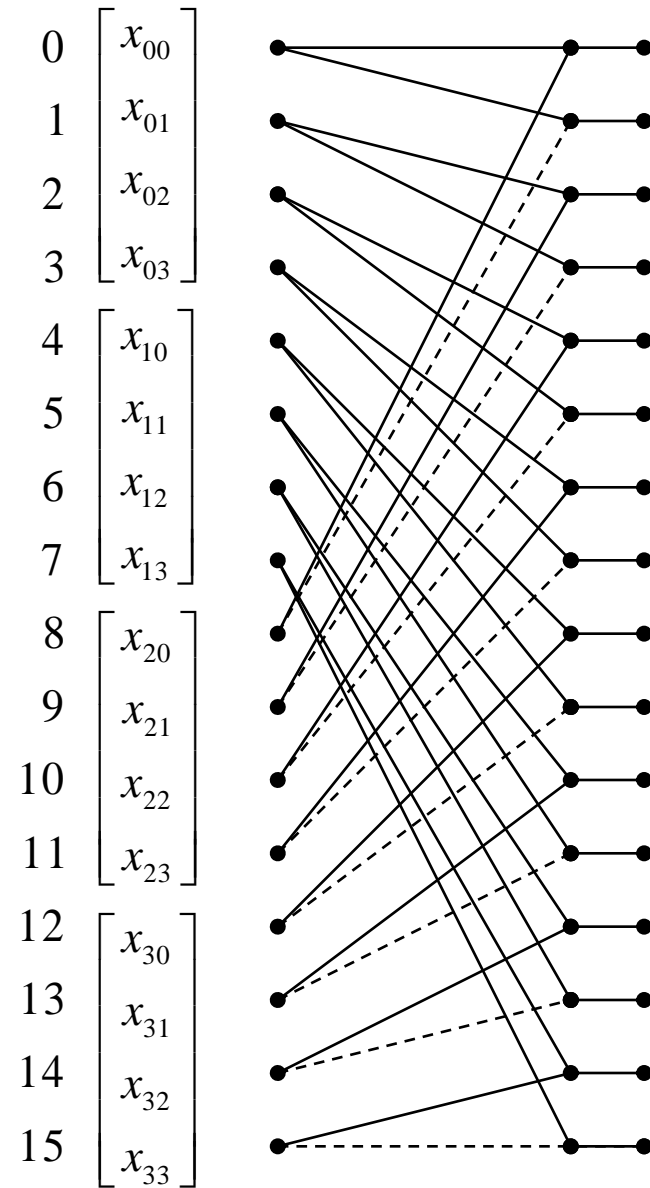




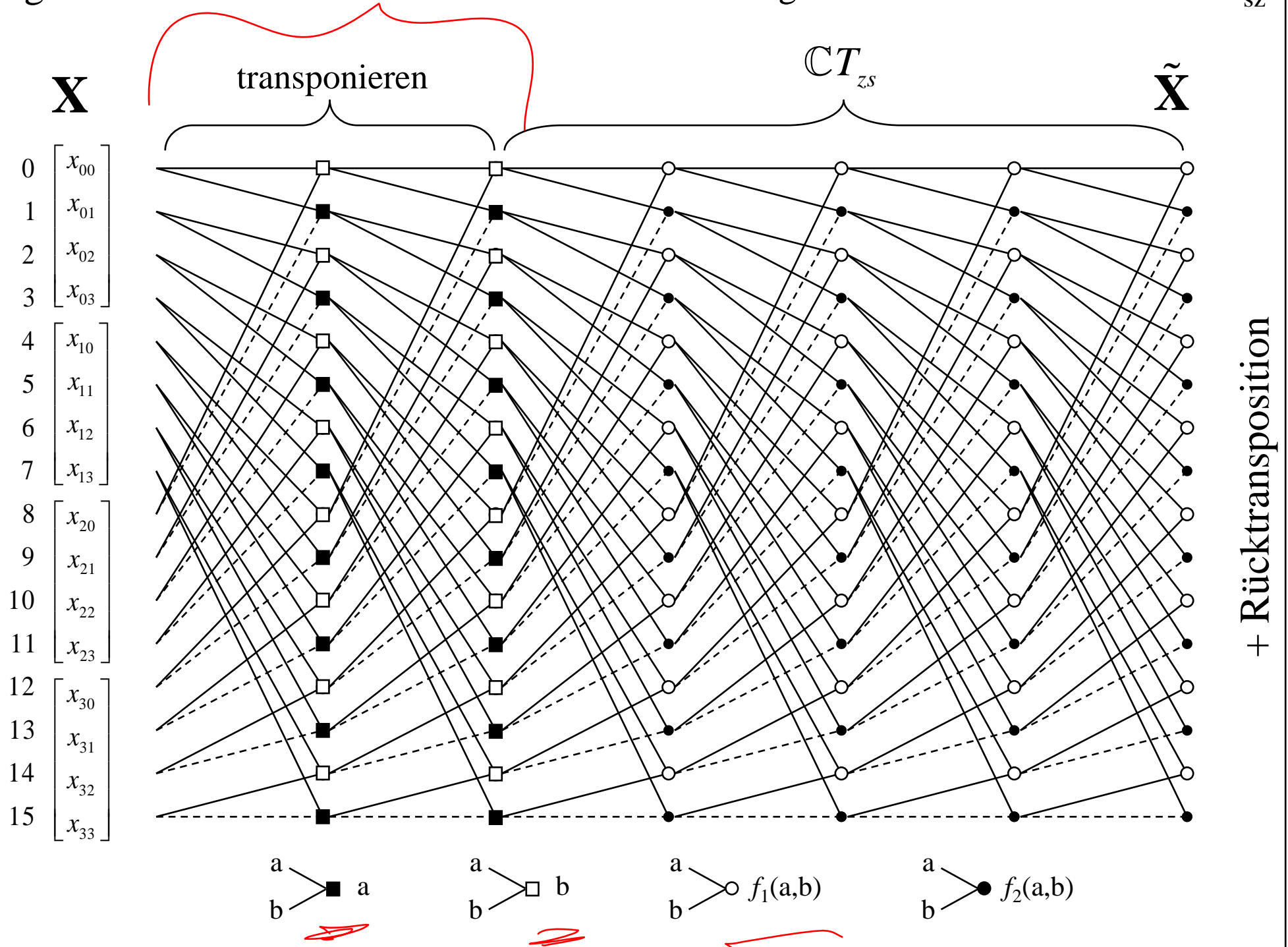
# Eindimensionale Realisierung der zweidimensionalen $\mathbb{C}T_{zs}$



# Homogene Struktur zur eindimensionalen Realisierung der zweidimensionalen $\mathbb{C}T_{zs}$



# Homogene Struktur zur eindimensionalen Realisierung der zweidimensionalen $\mathbb{C}T_{sz}$



# Eine allgemeinere Klasse zweidimensionaler translationsinvarianter Transformation $\mathbb{C}T_{2D}$

Es gilt offensichtlich:

$$\mathbb{C}T_{sz} = \omega_T^{-1} \circ \mathbb{C}T_{zs} \circ \omega_T \circ \mathbf{X}$$

Da auch das transponierte Ergebnis invariant ist, kann man sich die letzte Transposition ersparen:

$$\mathbb{C}T'_{sz} = \mathbb{C}T_{zs} \circ \omega_T \circ \mathbf{X}$$

$\omega_T$  ist ein Permutationsoperator

# Zu dieser Klasse gehört z.B. die Diagonaltransformation $\mathbb{C}T_{DI}$

Sie ist definiert als:

$$\mathbb{C}T_{DI} = \mathbb{C}T_{zs}(\omega_{DI}(\mathbf{X}))$$

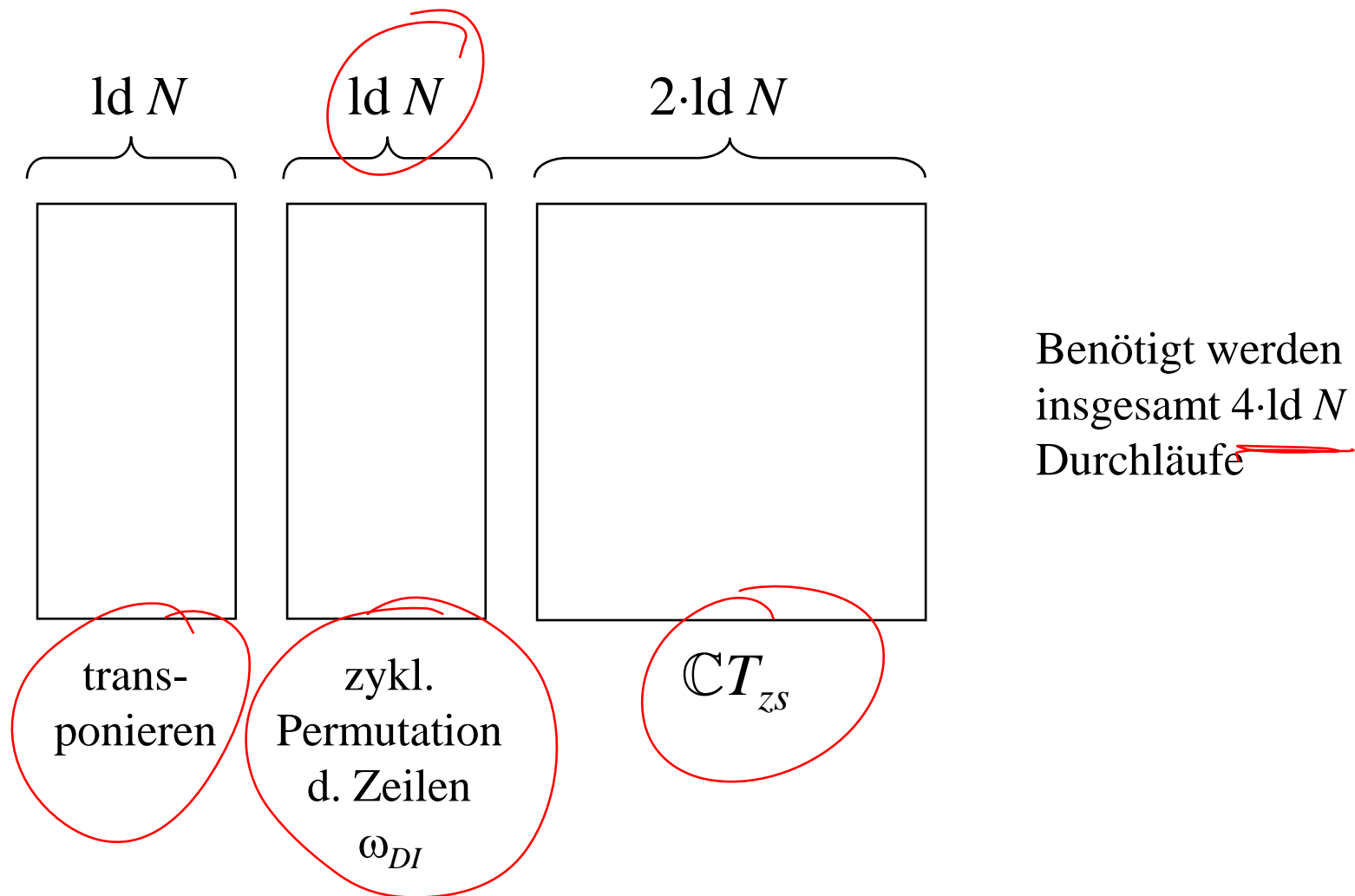
mit:  $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0^T \\ \mathbf{x}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{N-1}^T \end{bmatrix}$  und  $\dim(\mathbf{X}) = N \times N$

und der Definition der Diagonalpermutation:

$$\omega_{DI}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \tau_0(\mathbf{x}_0^T) \\ \tau_1(\mathbf{x}_1^T) \\ \vdots \\ \tau_{N-1}(\mathbf{x}_{N-1}^T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{0,0} & x_{0,1} & x_{0,2} & \cdots & x_{0,N-1} \\ x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & \cdots & x_{1,0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{N-1,N-1} & x_{N-1,0} & x_{N-1,1} & \cdots & x_{N-1,N-2} \end{bmatrix}$$

Die k-te Zeile  
wird k-mal  
zyklisch  
permutiert

# Realisierung der $\mathbb{C}T_{DI}$ auf Parallelrechner mit homogenem Verbindungsnetzwerk



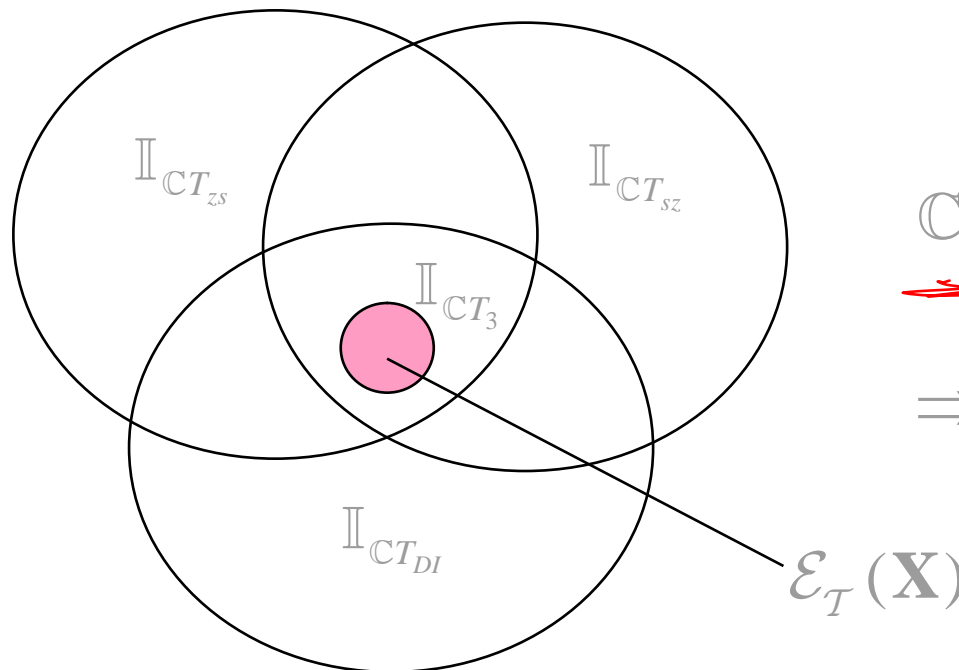
Zweidimensionale translationsinvariante  
Transformationsklasse mit einer Menge *allgemeinerer*  
*verträglicher Permutationen*  $\Omega := \{\omega_i\}$

$$\mathbb{C}T_{zs}(\omega_k(\tau_{ij}(\mathbf{X}))) = \mathbb{C}T_{zs}(\omega_k(\mathbf{X})) \text{ für } \forall \omega_k \in \Omega$$

(ohne Beweis!)

# Erhöhung des Grades an Vollständigkeit durch die Kombination verschiedener invarianter Transformationen

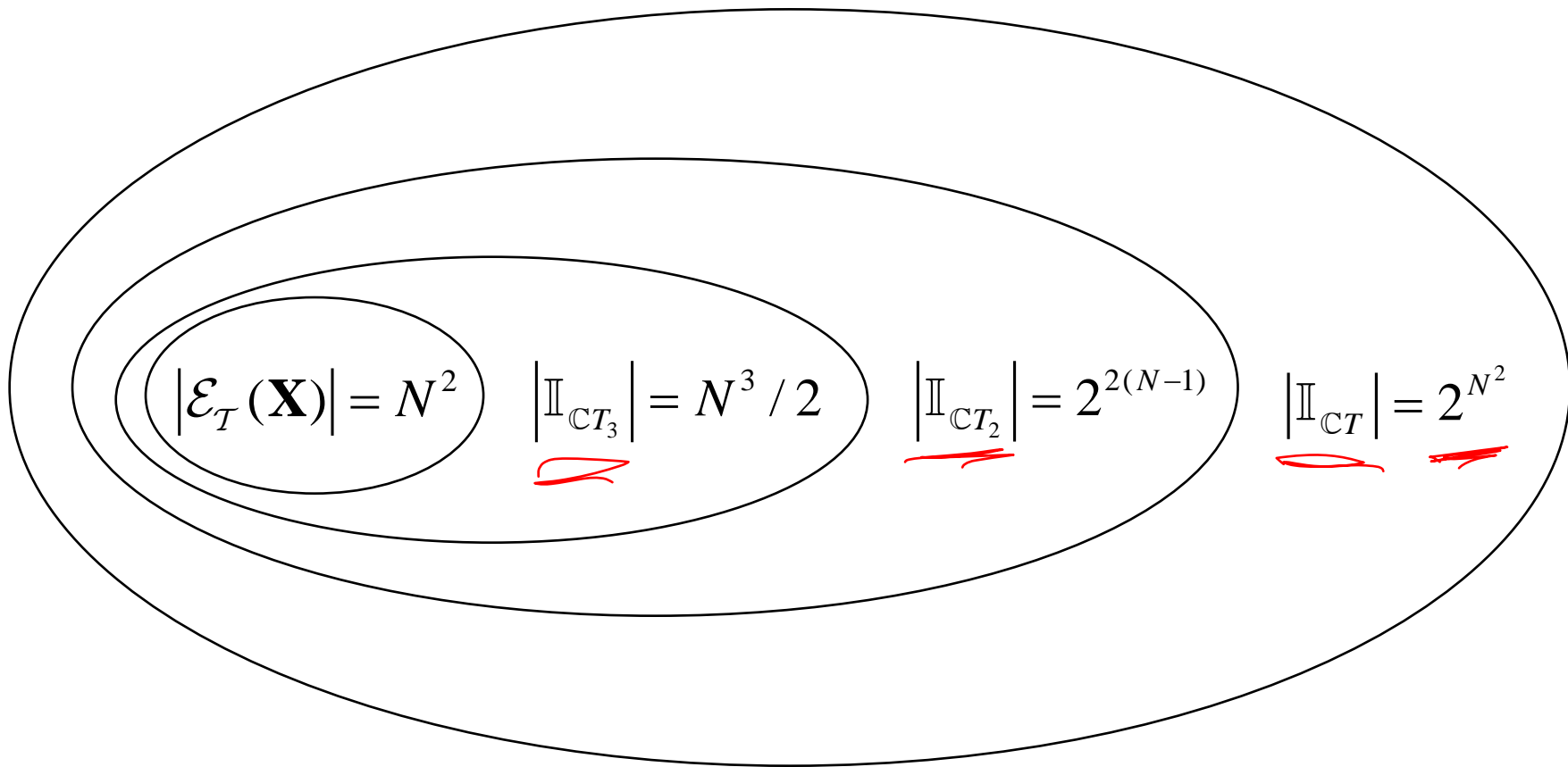
Vereinigt man die Merkmale von zwei oder mehr Transformationen, so folgt aus der Tatsache, dass deren Invariantenmengen i.allg. voneinander verschieden sind, dass sich die Invariantenmengen der neuen Transformation aus der i.a. kleineren Schnittmenge der ursprünglichen Transformationen ergeben:



$$\begin{aligned} \underline{CT_3} &:= \underbrace{CT_{zs} \cup CT_{sz}}_{CT_2} \cup \underline{CT_{DI}} \\ \Rightarrow I_{CT_3} &:= I_{CT_{zs}} \cap I_{CT_{sz}} \cap I_{CT_{DI}} \end{aligned}$$



# Grad an Vollständigkeit für die verschiedenen Klassen von Transformationen für Bildmatrizen der Größe $N \times N$



Reduktion von einer exponentiellen Mehrdeutigkeit auf eine polynomielle Mehrdeutigkeit!  
(ohne Beweis)

# Störempfindlichkeit der RT

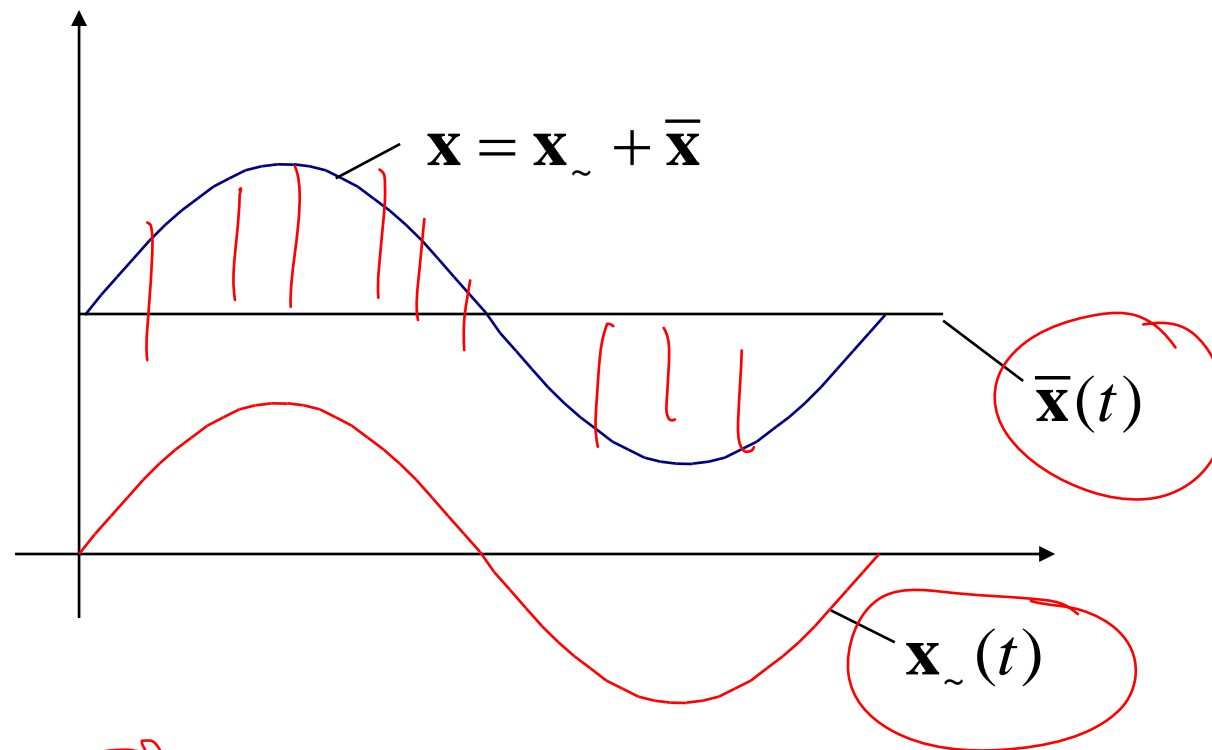
Reaktion auf systematische Störungen: Helligkeits- und Kontrastveränderungen:

$$\mathbf{x}' = k\mathbf{x} + a\mathbf{u} \quad \text{mit: } \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Zusätzlich *stochastische* Störungen:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{n}$$

# Zerlegung eines Signals in einen Wechsel- und einen Gleichanteil



$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\sim} + \bar{\mathbf{x}} = \underbrace{\mathbf{x}_{\sim}}_{\text{mittelwertfreier Anteil}} + \underbrace{\bar{x}\mathbf{u}}_{\text{Gleichanteil}} \quad \text{mit: } \bar{x} = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T x(t) dt \quad \text{bzw.: } \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

Satz: Ein zusätzlicher Gleichanteil beeinflusst nur den 0-ten Koeffizienten der RT; Invarianz erhält man einfach durch ignorieren des 0-ten Koeffizienten

$$\widetilde{(\mathbf{x} + a\mathbf{u})} = \widetilde{\mathbf{x}} + a \cdot N \cdot \mathbf{e}_1 = \widetilde{\mathbf{x}} + a \cdot N \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad a \in \mathbb{R}$$

$\mathbf{u} \hat{=} \text{Gleichanteil}$ ,  $\mathbf{e}_1 \hat{=} 1$ . Einheitsvektor

Satz: Die RT ist streng homogen bzgl. mittelwertfreier Muster  $\widetilde{\mathbf{x}}$ :

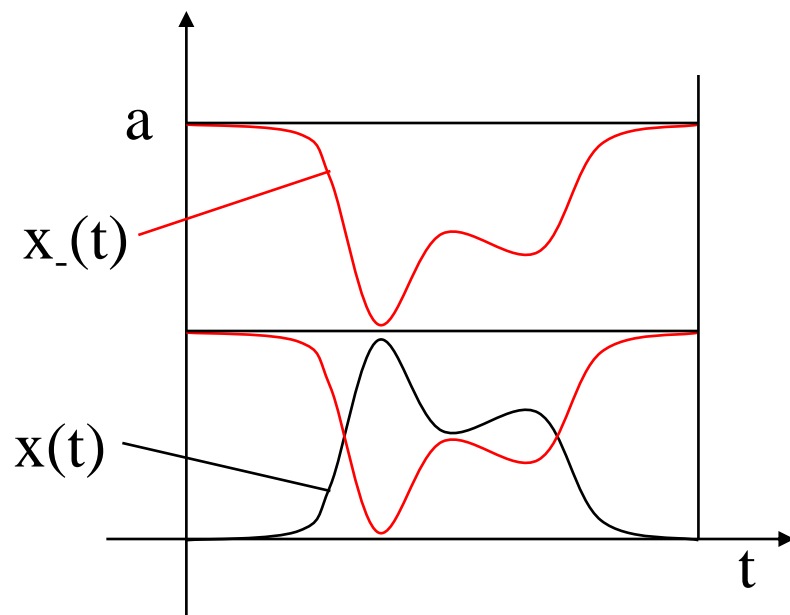
$$\widetilde{k\mathbf{x}} = |k| \widetilde{\mathbf{x}}$$

Beweis: vollständige Induktion

# Kontrastumkehr bei der RT („Negativ“)

Die RT ist *invariant* bzgl. einer Kontrastumkehr, wenn man den 0-ten Koeffizienten unterdrückt (nur verantwortlich für den Gleichanteil):

$$\mathbf{x}_- = a\mathbf{u} - \mathbf{x} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} - \mathbf{x}$$



$$\begin{aligned} \mathbf{x}_- &= a\mathbf{u} - \mathbf{x} = a\mathbf{u} - (\mathbf{x}_\sim + \bar{x}\mathbf{u}) \\ &= (-\mathbf{x}_\sim) + (a - \bar{x})\mathbf{u} \\ \Rightarrow \widetilde{\mathbf{x}}_- &= \widetilde{\mathbf{x}}_\sim + N(a - \bar{x})\mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

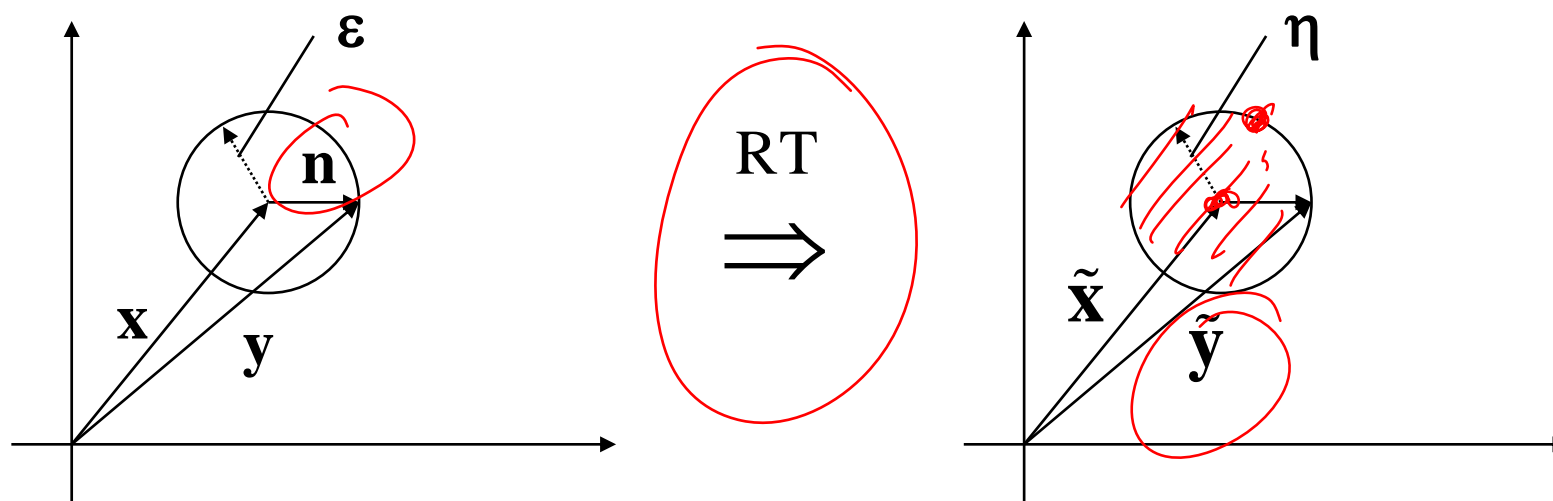
wegen:

$$\widetilde{(-\mathbf{x}_\sim)} = \widetilde{\mathbf{x}}_\sim \quad \text{und} \quad \widetilde{c\mathbf{u}} = Nc\mathbf{e}_1$$

Unter der Annahme, dass nur positive Intensitäten zugelassen sind, gilt:  $a \geq \max(x_i)$

# Reaktion der RT auf stochastische Störungen

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{n}$$



Die Abbildung ist stetig bzgl. der Euklidschen Metrik!

$$\|y - x\| = \|\mathbf{n}\| < \varepsilon \Rightarrow \|\tilde{y} - \tilde{x}\| < \eta(\varepsilon)$$

präziser:  $\|\tilde{y} - \tilde{x}\| \leq \sqrt{N} \|y - x\|$  wobei:  $\dim(\mathbf{x}) = \dim(\mathbf{y}) = N$

d.h.  $\eta = \sqrt{N} \varepsilon$


Beweis:  
vollst. Ind.

# Zwei Abbildungsbeispiele für die RT

a) Ergebnis liegt auf dem Rand der Abschätzung:

$$\mathbf{x}^T = [1 \ 3 \ 5 \ 6 \ 8 \ 7 \ 4 \ 2] \quad \mathbf{n}^T = [0,385 \ 0,196 \ 0,22 \ -0,595 \ -0,307 \ -0,296 \ 0,462 \ 0,121]$$

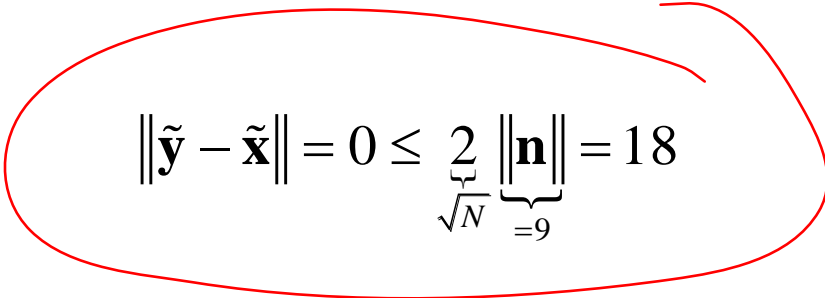
$$\tilde{\mathbf{x}}^T = [36 \ 0 \ 2 \ 2 \ 16 \ 0 \ 6 \ 6] \quad \tilde{\mathbf{y}}^T = \widetilde{(\mathbf{x} + \mathbf{n})}^T = [36,2 \ 1,33 \ 2,98 \ 1,77 \ 13,9 \ 0,274 \ 5,77 \ 5,33]$$

$$\|\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{x}}\| = 2,83 \underbrace{\|\mathbf{n}\|}_{=1} = \sqrt{N} = \sqrt{8}$$


b) Ergebnis liegt im Innern der Abschätzung:

$$\mathbf{x}^T = [8 \ 3 \ 5 \ 1] \quad \mathbf{n}^T = [-4,5 \ 4,5 \ -4,5 \ 4,5]$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^T = \tilde{\mathbf{y}}^T = [17 \ 9 \ 5 \ 1]$$


$$\|\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{x}}\| = 0 \leq \underbrace{\frac{2}{\sqrt{N}}}_{=9} \|\mathbf{n}\| = 18$$

# Dynamikumfang der Klasse $\mathbb{C}T$

- Die B- und die M-Transformation sind abgeschlossen, d.h. alle Zwischen- und das Endergebnis liegen im Zahlenbereich der Ausgangsdaten des A/D-Wandlers
- Bei der RT ergibt sich folgender Dynamikumfang (Anzahl der Binärstellen) der Transformierten:

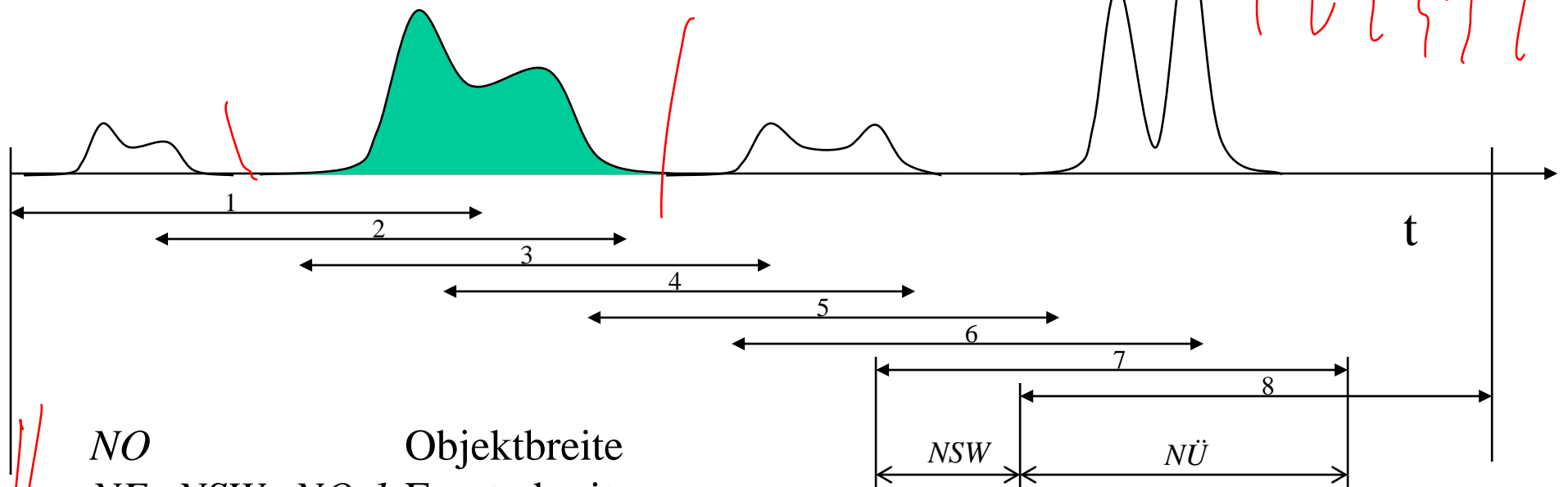
$$\underbrace{m}_{\substack{\text{A/D-Wandler} \\ \text{---}}} + n = m + \log_2 N$$

d.h. in jeder Schicht der RT kommt höchstens eine Stelle hinzu  
(Verdopplung des Wertes)



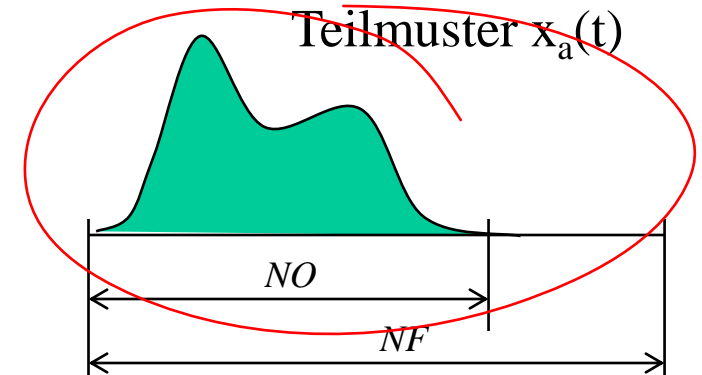
# Suchfeldstrategie mit sich überlappenden Fenstern bei ein-dimensionalen Signalen als Alternative zur vollständigen Korrelation

Auszuwertendes Gesamtmuster  $x(t)$



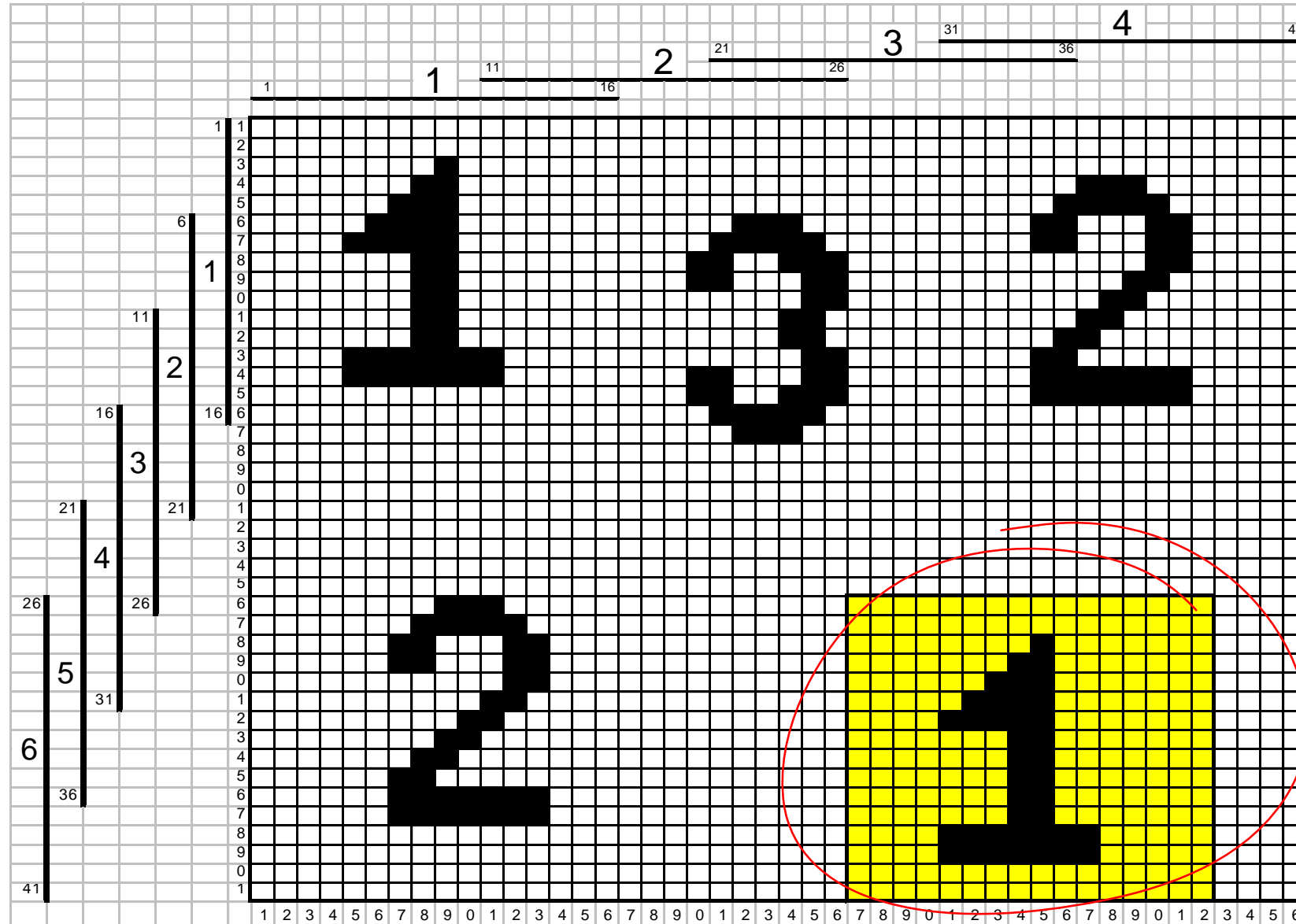
$NO$  Objektbreite  
 $NF = NSW + NO - 1$  Fensterbreite  
 $NSW = NF - NÜ$  Schrittweite  
 $NÜ = NO - 1$  Überschneidungsbereich  
Garantie, dass Objekt vollständig in einem der Teilfenster enthalten!!

Zu detektierendes Teilmuster  $x_a(t)$

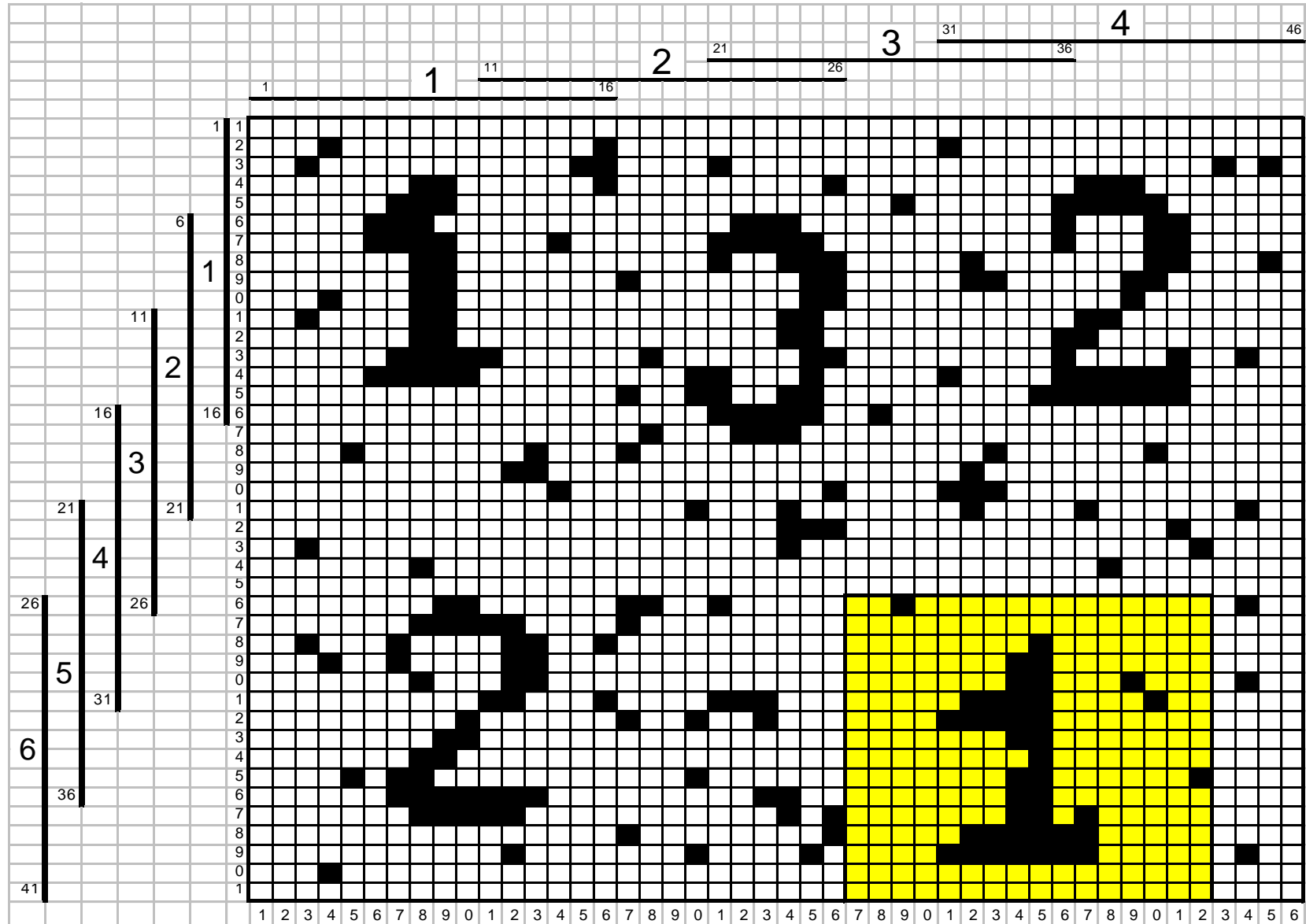


Kompromiss zwischen Schrittweite und Signal/Rauschverhältnis (Vereinzelungsbedingung)

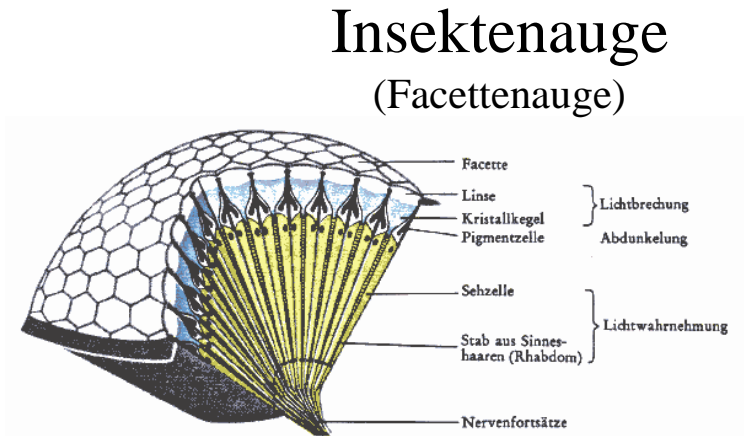
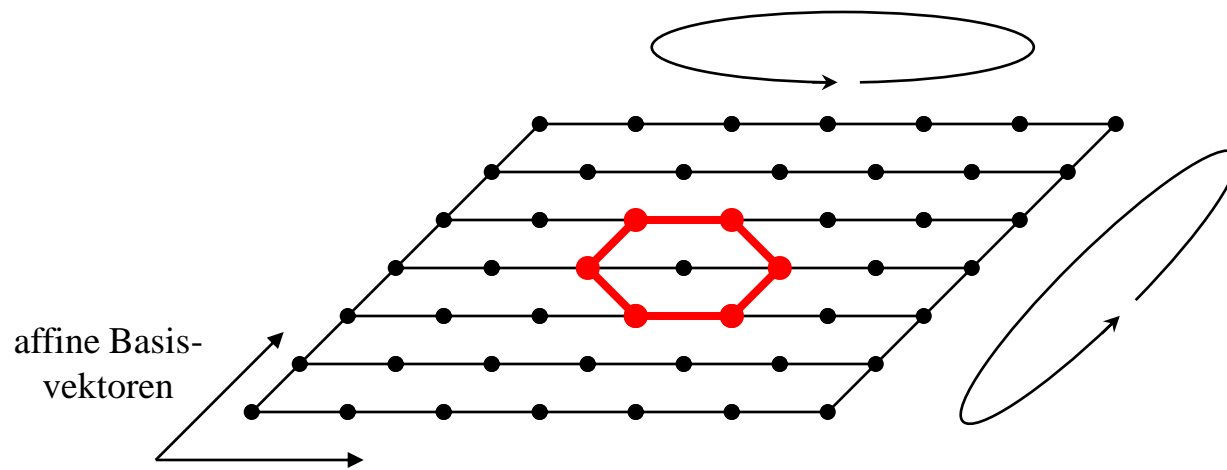
# Suchfeldstrategie mit sich überlappenden Fenstern bei ungestörten Vorlagen



# Suchfeldstrategie mit sich überlappenden Fenstern bei gestörten Vorlagen



# Translationsinvarianz bei einer Hexagonalabtastung



Jede Translation in einem Hexagonalraster kann durch Überlagerung zweier *schiefwinkliger (affiner) Basisvektoren* realisiert werden. Das Grundgebiet bildet eine Raute.

Durch eine Reorganisation der Daten kann auch näherungsweise ein Rechteckraster erzeugt werden.

