

Kapitel 5

Allgemeine Ansätze zur Berechnung von Invarianten

Die drei kanonischen Möglichkeiten zur Berechnung von Invarianten (notwendige Bedingungen)

1) Integration über die Transformationsgruppe (Haar-Integral, Hurwitz 1897)

$$I = \int_{\mathcal{G}} f(g(\mathbf{p})\mathbf{x}) dg$$

z.Bsp. f : Polynome

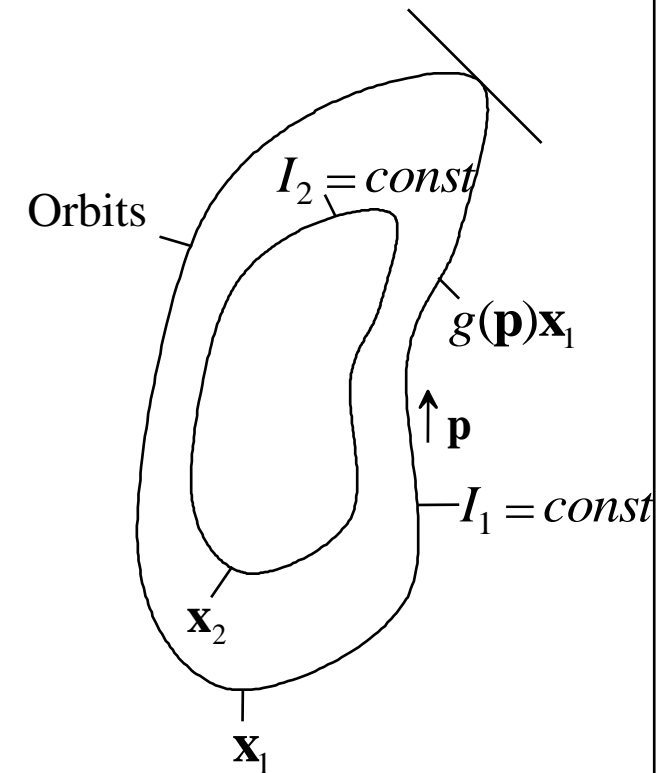
2) Differenzieller Ansatz

$$\left. \frac{\partial I(g(\mathbf{p})\mathbf{x})}{\partial p_i} \right|_{p=0} \equiv 0 \equiv 0 \text{ für beliebige } \mathbf{p}$$

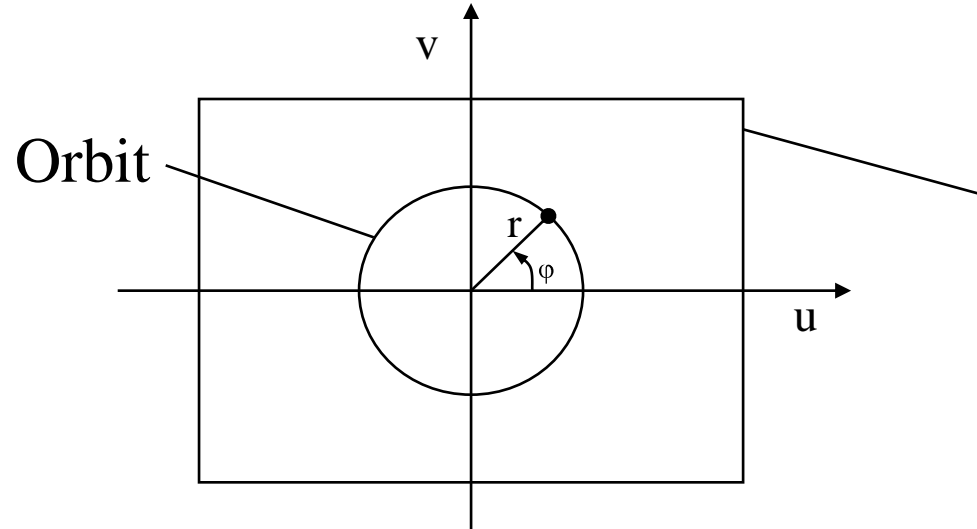
löse die entspr. partiellen Dgl. \Rightarrow Lie-Theorie

3) Normalisierung

reduziere die Darstellung auf extremale Punkte der Orbits, z.Bsp. auf den Punkt maximaler Krümmung (Schwerpunktnormierung, FDen)



Beispiel für den differentiellen Ansatz



Graubild

$X(u, v)$ bzw. $X(r, \varphi)$

$u = r \cos(\varphi)$

$v = r \sin(\varphi)$

Gesucht sind Invarianten für die Drehgruppe $\mathcal{G}(\varphi)$:

$$g(\varphi)X(u, v) = X(u \cos \varphi - v \sin \varphi, u \sin \varphi + v \cos \varphi)$$

Gesucht ist eine Funktion f mit der Eigenschaft:

$$\frac{df(g(\varphi)X(u, v))}{d\varphi} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{Kettenregel}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u} (-u \sin \varphi - v \cos \varphi) + \frac{\partial f}{\partial v} (u \cos \varphi - v \sin \varphi) = 0$$

$$\varphi = 0: \quad \boxed{-v \frac{\partial f}{\partial u} + u \frac{\partial f}{\partial v} = 0}$$

Diese partielle Dgl. wird gelöst durch:

$$f(u, v) = u^2 + v^2 = r^2$$

D.h. alle Funktionen, die nur vom Radius r , aber nicht vom Winkel φ abhängen sind zulässige invariante Merkmale für die Drehgruppe, also z. B. das Integral über ein Kreissegment, oder auch alle höheren Momente:

$$M_n = \int_{r=0}^R \int_{\varphi=0}^{2\pi} r^n X(r, \varphi) d\varphi dr$$

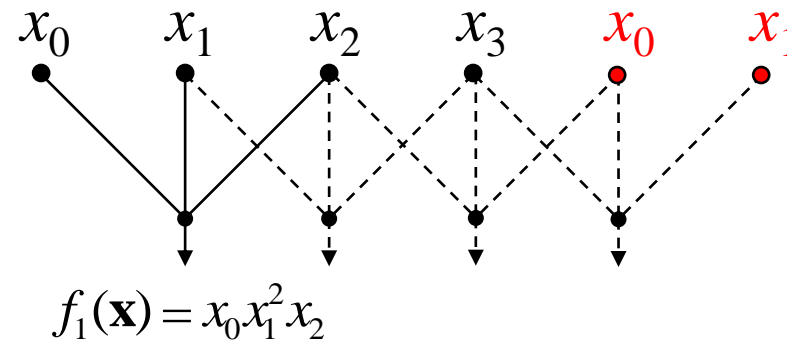
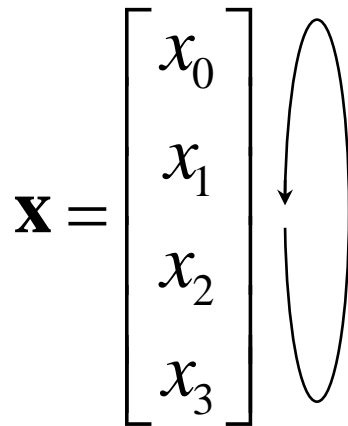
Diese Momente sind invariant, jedoch nicht vollständig.

Schwierigkeit der differentiellen Methodik:

Die Notwendigkeit partielle Differentialgleichungen zu lösen (falls die Gruppe mehr als einen Parameter hat)

Integration über die endliche Gruppe der Translationen

Bei endlichen diskreten Gruppen geht die Integration über in eine Summation über die Gruppe (sog. Gruppenmittel). Es werden bevorzugt polynomiale Funktionen mit lokalem Definitionsbereich (functions of finite support) bevorzugt, also z.Bsp. Für $N=4$:



Ein Monom, ist ein Polynom von der Form

$$P(\mathbf{x}) = x_0^{d_0} x_1^{d_1} \cdots x_{n-1}^{d_{n-1}}$$

Die Summe $d = \sum_{i=0}^{n-1} d_i$ wird als Grad des Monoms bezeichnet.

Durch Summation über die Gruppenwirkung ergibt sich ein invariantes Merkmal zu:

$$\tilde{x}_1 = \sum_{i=0}^{i=3} f_1(g_i \mathbf{x}) = x_0 x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2 x_0 + x_3 x_0^2 x_1$$

Der Nachweis der Invarianz ist einfach nachzuprüfen durch zyklische Permutation der Indizes: $f(\tau_1(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x})$

Eine noch einfachere Invariante ergibt sich durch Summation über das Monom ersten Grades $f_0=x_0$ zu:

$$\tilde{x}_0 = \sum_{i=0}^{i=3} f_0(g_i \mathbf{x}) = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 \quad (\text{einfacher Mittelwert})$$

Vollständigkeit für endliche Gruppen

(Emmy Noether, 1916)

Für endliche Gruppen \mathcal{G} mit $|\mathcal{G}|$ Elementen und Muster der Dimension N erhält man vollständige Merkmale, oder eine Basis, wenn man über alle Monome vom Grad $\leq |\mathcal{G}|$ summiert. Die Anzahl der Monome ist gegeben durch:

$$\binom{N + |\mathcal{G}|}{N}$$



1882-1935

Dies ist eine obere Schranke, welche Vollständigkeit garantiert; praktisch kann Vollständigkeit bereits für wesentlich weniger Elemente existieren.

Bei der diskreten Translationsgruppe erhält man mit $\dim(x) = |\mathcal{G}| = N$:

$$\binom{2N}{N} = \frac{(2N)!}{(N!) \cdot (N!)}$$

Für $N = 4$ sind das $\frac{8!}{(4!) \cdot (4!)} = 70$ und für $N = 8$ bereits $\frac{16!}{(8!)^2} = 12.870$

Orbits für Binärmuster der Dimension $N=4$ bzgl. zyklischer Translationen

Orbits	Muster			
O_0	$(0, 0, 0, 0)^T$			
O_1	$(0, 0, 0, 1)^T$	$(0, 0, 1, 0)^T$	$(0, 1, 0, 0)^T$	$(1, 0, 0, 0)^T$
O_2	$(0, 0, 1, 1)^T$	$(0, 1, 1, 0)^T$	$(1, 1, 0, 0)^T$	$(1, 0, 0, 1)^T$
O_3	$(0, 1, 0, 1)^T$	$(1, 0, 1, 0)^T$		
O_4	$(0, 1, 1, 1)^T$	$(1, 1, 1, 0)^T$	$(1, 1, 0, 1)^T$	$(1, 0, 1, 1)^T$
O_5	$(1, 1, 1, 1)^T$			

Translationsinvarianz bei Binärmustern der Länge $N=4$

Berechne aus Gründen der Vollständigkeit alle Gruppenmittel vom Grad ≤ 4 . Da wir über die zyklischen Translationen mitteln, können die Monome, welche aus einer zyklischen Translation der Eingangsdaten auseinander hervorgehen, unberücksichtigt bleiben, da sie keine neue Qualität hinzufügen.

Beachtet man außerdem, dass für Binärmuster gilt:

$$x_i^{d_j} = x_i \quad \text{für } \forall d_j > 0, x_i \in \{0,1\}$$

So sind von 70 möglichen Monomen nur noch die folgenden zu betrachten:

$$f_0(\mathbf{x}) = x_0$$

offensichtlich ist $f_5(\mathbf{x})=1$ von wenig praktischem Nutzen

$$f_1(\mathbf{x}) = x_0 x_1$$

$$f_2(\mathbf{x}) = x_0 x_2$$

$x_0 x_2 x_3$ z.Bsp. erhält man durch

$$f_3(\mathbf{x}) = x_0 x_1 x_2$$

zykl. Transl. aus $x_0 x_1 x_2$:

$$f_4(\mathbf{x}) = x_0 x_1 x_2 x_3$$

$$x_{\langle 0+2 \rangle} x_{\langle 1+2 \rangle} x_{\langle 2+2 \rangle} = x_2 x_3 x_0 = x_0 x_2 x_3$$

Gruppenmittel

Aus diesen Monomen berechnen sich die folgenden Gruppenmittel:

$$\tilde{x}_0 = T(f_0(\mathbf{x})) = (x_0 + x_1 + x_2 + x_3)$$

$$\tilde{x}_1 = T(f_1(\mathbf{x})) = (x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_0)$$

$$\tilde{x}_2 = T(f_2(\mathbf{x})) = (x_0x_2 + x_1x_3 + x_2x_0 + x_3x_1) = 2(x_0x_2 + x_1x_3)$$

$$\tilde{x}_3 = T(f_3(\mathbf{x})) = (x_0x_1x_2 + x_1x_2x_3 + x_2x_3x_0 + x_3x_0x_1)$$

$$\tilde{x}_4 = T(f_4(\mathbf{x})) = 4x_0x_1x_2x_3$$

Daraus resultieren die folgenden Invarianten für die verschiedenen Orbits:

Orbits	\tilde{x}_0	\tilde{x}_1	\tilde{x}_2	\tilde{x}_3	\tilde{x}_4
O_0	0	0	0	0	0
O_1	1	0	0	0	0
O_2	2	1	0	0	0
O_3	2	0	2	0	0
O_4	3	2	2	1	0
O_5	4	4	4	4	4

Man erkennt, dass bereits die beiden Merkmale \tilde{x}_0 und \tilde{x}_1 einen vollständigen Merkmalsraum für die Menge der Binärmuster mit $N = 4$ aufspannen! (Obergrenze nach Noether: 70)

Geometrische Veranschaulichung der Gruppenmittel: *Schnitt von Mannigfaltigkeiten*

Gruppenmittel für die *Translation* bei $N=2$:

$$\text{Orbit: } O \left(\underbrace{\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_1} \right) = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_2} \right\}$$

Spiegelung an 1. Winkelhalbierenden

1. geometrischer Ort mit linearen
Gruppenmitteln $f_0 = x_0$:

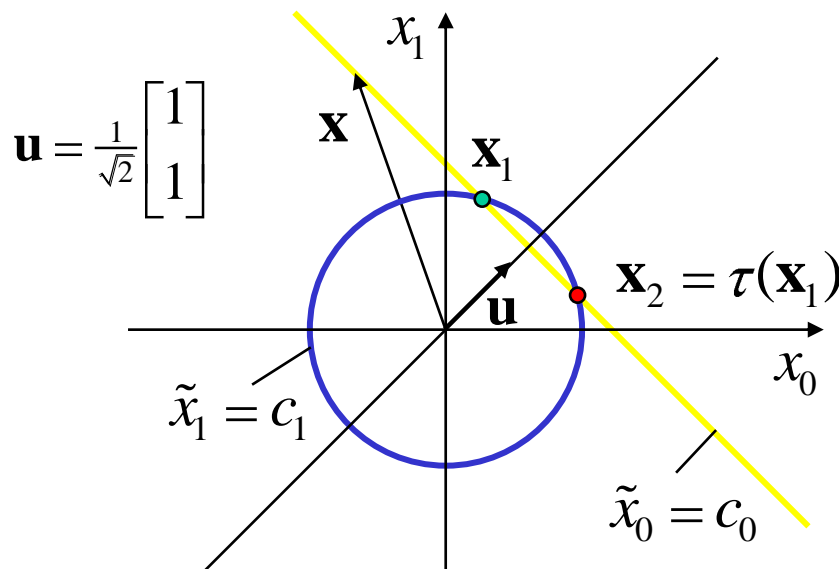
$\tilde{x}_0 = x_0 + x_1 = \sqrt{2} \langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle = c_0$ (Gerade \perp auf \mathbf{u})
noch mehrdeutig!

2. geometrischer Ort mit quadratischen
Gruppenmitteln $f_1 = x_0^2$:

$\tilde{x}_1 = x_0^2 + x_1^2 = c_1$ (Kreis)

Schnittpunkt beider geometrischer Örter ergibt
genau die Vektoren der Äquivalenzklasse:

$\Rightarrow \tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{x}_1 \end{bmatrix}$ ist vollständig!



Eine weitere *lineare* Invariante löst nicht das Problem!

Wählt man z.B. eine andere Multilinearform der Art $f_1 = 2x_0 + x_1$ so erhält man nach der Gruppenmittelung: $\tilde{x}_1 = (2x_0 + x_1) + (2x_1 + x_0) = 3(x_0 + x_1)$

Diese Invariante ist aber nicht von neuer Qualität im Vergleich zu:

$$\tilde{x}_0 = x_0 + x_1 \sim \tilde{x}_1$$

Wahl einer alternativen Mannigfaltigkeit 2. Grades

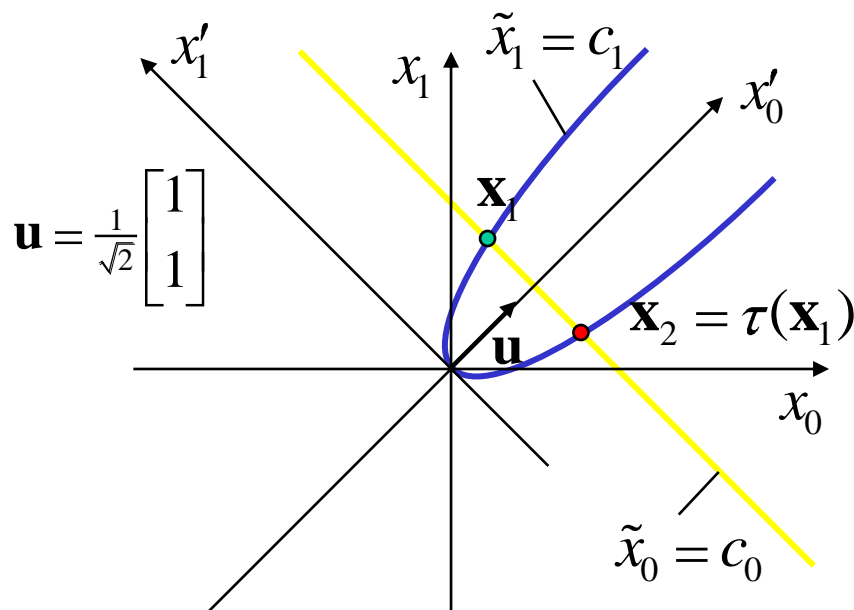
1. geometrischer Ort mit linearen Gruppenmitteln $f_0 = x_0$:

$$\tilde{x}_0 = x_0 + x_1 = \sqrt{2} \langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle = c_0 \quad (\text{Gerade } \perp \text{ auf } \mathbf{u}) \text{ noch mehrdeutig!}$$

2. geometrischer Ort mit Parabel symmetrisch zur x'_0 -Achse: $x'_0 = kx_1'^2$

und mit $x'_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_0 + x_1)$
 $x'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_0)$ folgt daraus: $x_0^2 + x_1^2 - 2x_0x_1 - \frac{1}{k}(x_0 + x_1) = 0$

Dies kann als quadratisches Gruppenmittel über $f_1 = \frac{1}{2}(x_0^2 + x_1^2) - x_0x_1 - \frac{1}{2k}x_0$ erzeugt werden.



$$\frac{\frac{1}{2}(x_0^2 + x_1^2) - x_0x_1 - \frac{1}{2k}x_0}{\frac{1}{2}(x_1^2 + x_0^2) - x_1x_0 - \frac{1}{2k}x_1}$$

$$\tilde{x}_1 = x_0^2 + x_1^2 - 2x_0x_1 - \frac{1}{k}(x_0 + x_1)$$

Schnittpunkt beider geometrischer Örter ergibt genau die Vektoren der Äquivalenzklasse:

$$\Rightarrow \tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{x}_1 \end{bmatrix} \text{ ist vollständig!}$$

Gruppenmittel für die Äquivalenzklasse zyklischer Translationen mit $N=3$

Orbit: $O \left(\begin{array}{c} \boxed{x_0} \\ \boxed{x_1} \\ \boxed{x_2} \\ \underbrace{\hspace{1cm}}_{\mathbf{x}_1} \end{array} \right) = \left\{ \begin{array}{c} \boxed{x_0} \\ \boxed{x_1} \\ \boxed{x_2} \\ \underbrace{\hspace{1cm}}_{\mathbf{x}_1} \end{array}, \begin{array}{c} \boxed{x_1} \\ \boxed{x_2} \\ \boxed{x_0} \\ \underbrace{\hspace{1cm}}_{\mathbf{x}_2} \end{array}, \begin{array}{c} \boxed{x_2} \\ \boxed{x_0} \\ \boxed{x_1} \\ \underbrace{\hspace{1cm}}_{\mathbf{x}_3} \end{array} \right\}$ Rotation an der 1. Raumdiagonalen um $2\pi/3$

1. geometrischer Ort mit linearen Gruppenmitteln $f_0 = x_0$:

$$\tilde{x}_0 = x_0 + x_1 + x_2 = \sqrt{3} \langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle = c_0 \quad (\text{Ebene } \perp \text{ auf } \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T)$$

2. geometrischer Ort mit quadratischen Gruppenmitteln $f_1 = x_0^2$:

$$\tilde{x}_1 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = c_1 \quad (\text{Kugel}) \quad \tilde{x}_0 \cap \tilde{x}_1 \text{ ergibt Kreis}$$

Start der Matlab-Demo
[matlab-ME.bat](#)

3. geometrischer Ort:

a) $f_2 = x_0^3 \Rightarrow$ Gruppenmittel: $\tilde{x}_2 = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 = c_2$

$\tilde{x}_0 \cap \tilde{x}_1 \cap \tilde{x}_2$ ergibt 6 Punkte (auch invariant gegenüber Spiegelung!)

b) erst die Wahl von zwei asymmetr. Funktionen vom Grad 3 und f_0 führt zur Vollständigkeit:

$$f_1 = x_0^2 x_1 \Rightarrow \text{Gruppenmittel: } \tilde{x}_2 = x_0^2 x_1 + x_1^2 x_2 + x_2^2 x_0 = c_2$$

$$f_2 = x_0 x_1^2 \Rightarrow \text{Gruppenmittel: } \tilde{x}_3 = x_0 x_1^2 + x_1 x_2^2 + x_2 x_0^2 = c_3$$

$\tilde{x}_0 \cap \tilde{x}_1 \cap \tilde{x}_2$ ergibt genau die 3 Punkte der Äquivalenzklasse!

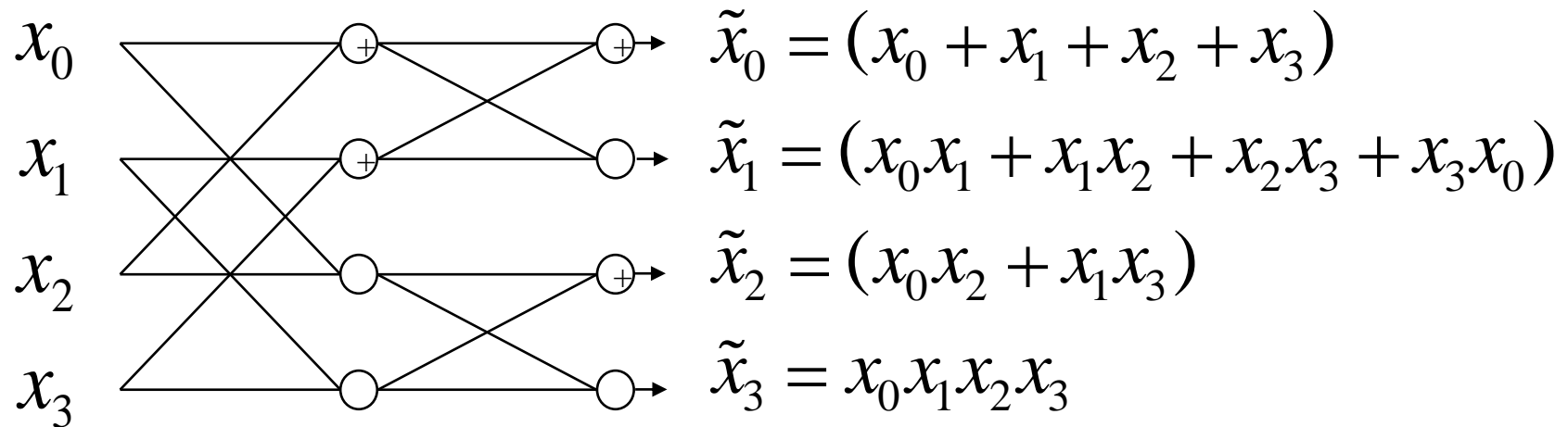
Schnitt von Mannigfaltigkeiten

$$\begin{array}{lll} \tilde{x}_0(x_0, x_1, x_2) = c_0 & \Rightarrow & \text{1. Hyperfläche} \quad g_0(x_0, x_1, x_2, c_0) = 0 \\ \tilde{x}_1(x_0, x_1, x_2) = c_1 & \Rightarrow & \text{2. Hyperfläche} \quad g_1(x_0, x_1, x_2, c_1) = 0 \\ \vdots & & \vdots \\ & & g_0 \cap g_1 \cap g_2 \cdots \end{array}$$

- Die notwendige Bedingung garantiert, dass alle Mannigfaltigkeiten durch die Punkte der Äquivalenzklasse gehen.
- Nimmt man mehr und mehr unabhängige Invarianten hinzu, so wird in der Regel die Schnittmenge verkleinert und damit steigt der Grad der Vollständigkeit (die Hyperflächen schneiden sich in immer weniger Punkten bzw. in Mannigfaltigkeiten geringerer Dimension).

Beziehungen zur Klasse \mathbb{CT}

Berechnet man Invarianten von der Klasse \mathbb{CT} mit den Funktionen $f_1 = a + b$ und $f_2 = a \cdot b$ so ergibt sich für $N=4$:



Dies ist aber genau eine Teilmenge von Invarianten, welche man mit der Gruppenmittelung über Monome erhalten würde, hier jedoch mit einem schnellen Algorithmus der Komplexität $O(N \log N)$ anstatt $O(N^2)$ berechnet.

Verbesserung der Trenneigenschaften (Grad der Vollständigkeit)
durch Vergrößerung des Musterraumes mit Hilfe schwach
kommutativer Vorverarbeitungsabbildungen ω_i
(siehe dazu auch die Ausführungen im Kapitel SVM)

Definition der schwachen Kommutativität: Eine Abbildung $\omega : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ des
Musterraumes \mathcal{X} auf sich heißt schwach kommutativ, falls zu jedem $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ und
 $g_1 \in \mathcal{G}$ ein $g_2 \in \mathcal{G}$ mit der folgenden Eigenschaft existiert:

$$\omega g_1 \mathbf{x} = g_2 \omega \mathbf{x}$$

Lemma: Sei $\omega : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ eine schwach kommutative Abbildung und T
eine invariante Abbildung, dann bilden $T \circ \omega$ ebenfalls Invarianten.

Beweis: Für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, $g_1 \in \mathcal{G}$ gilt:

$$(T \circ \omega)(g_1 \mathbf{x}) = T(\omega g_1 \mathbf{x}) = T(g_2 \omega \mathbf{x}) = T(\omega \mathbf{x}) = (T \circ \omega)(\mathbf{x})$$

Betrachtet werden wiederholte (iterative) Anwendungen von ω :
 $T \circ \omega$, $T \circ \omega \circ \omega$, ... (dabei wird der Raum weiter aufgebläht mit
Polynomtermen höheren Grades - "Kerntrick")

Konstruktion von *weiteren* schwach kommutativen Vorverarbeitungsabbildungen

Lemma:

Jede Verknüpfung aus schwach kommutativen Abbildungen

$$\omega_1 \circ \omega_2$$

ist ebenfalls schwach kommutativ.

Vergleiche dazu auch die Vorgehensweise bei der Definition von $\mathbb{C}T_2$ und $\mathbb{C}T_3$ mit allgemein *verträglichen* Permutationen ω_i als zulässige Vorverarbeitung:

$$\mathbb{C}T_3 := \underbrace{\mathbb{C}T_{zs} \cup \mathbb{C}T_{sz}}_{\mathbb{C}T_2} \cup \mathbb{C}T_{DI}$$

$$\Rightarrow \mathbb{I}_{\mathbb{C}T_3} := \mathbb{I}_{\mathbb{C}T_{zs}} \cap \mathbb{I}_{\mathbb{C}T_{sz}} \cap \mathbb{I}_{\mathbb{C}T_{DI}}$$

Mit:

$$\mathbb{C}T_{sz} = \mathbb{C}T_{zs} \circ \omega_T \circ \mathbf{X}$$

$$\mathbb{C}T_{DI} = \mathbb{C}T_{zs} \circ \omega_{DI} \circ \mathbf{X}$$

Man kann zeigen: ω_T und ω_{DI} sind schwach kommutative Vorverarbeitungsoperatoren!

Invarianten für die Gruppe der zyklischen Translationen für Binärmuster der Dimension $N=16$

Man erhält $2^{16} = 65.536$ unterschiedliche Binärmuster.

Mit Hilfe der Pólya-Theorie lässt sich zeigen, dass es genau die folgende Zahl von unterscheidbaren Orbits oder Äquivalenzklassen gibt:

$$A_B = \frac{1}{N} \sum_{k|N} \varphi(k) 2^{\frac{N}{k}} \Big|_{N=16} = 4116$$

Die Summe geht über alle Teiler k von N . φ ist die Eulersche φ -Funktion (Die Eulersche φ -Funktion $\varphi(n)$ gibt die Anzahl aller natürlichen Zahlen k mit $1 \leq k \leq n$, welche teilerfremd zu n sind.

Also z.B. $\varphi(6) = 2$, nämlich ist 1 und 5. Für Primzahlen p gilt offensichtlich:
 $\varphi(p) = p-1$.

Trenneigenschaften polynomialer Merkmale

Es wurden folgende 9 Monome über die Gruppe gemittelt:

$$\begin{array}{lll}
 f_0 = x_0 & f_3 = x_0 x_3 & f_6 = x_0 x_6 \\
 f_1 = x_0 x_1 & f_4 = x_0 x_4 & f_7 = x_0 x_7 \\
 f_2 = x_0 x_2 & f_5 = x_0 x_5 & f_8 = x_0 x_8
 \end{array}$$

Merkmalmenge	sep. Muster A_S	$\Delta = A_S / A_B$
\tilde{x}_0	17	0,004
\tilde{x}_0, \tilde{x}_1	66	0,016
$\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2$	200	0,049
$\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$	501	0,122
$\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4$	980	0,238
$\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4, \tilde{x}_5$	1516	0,368
$\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4, \tilde{x}_5, \tilde{x}_6$	1818	0,442
$\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4, \tilde{x}_5, \tilde{x}_6, \tilde{x}_7$	1876	0,456
$\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4, \tilde{x}_5, \tilde{x}_6, \tilde{x}_7, \tilde{x}_8$	1876	0,456

Ergeben sich folgende Trenneigenschaften:

Mit A_S gleich der Anzahl der separierbaren Äquivalenzklassen, gleichbedeutend mit der Anzahl der voneinander verschiedenen Merkmalsvektoren.

Verbesserung der Trenneigenschaften polynomialer Merkmale

Mit den folgenden
zwei Merkmalen:

$$\tilde{x}_0 = x_0 + \dots + x_{15}$$

$$\tilde{x}_1 = (x_0 + x_1)^2 + (x_1 + x_2)^2 + \dots + (x_{15} + x_0)^2$$

Und der schwach
kommutativen Abb.:

$$(\omega \mathbf{x})_i = x_i + (2x_{(i-1) \bmod 16} + x_{(i+1) \bmod 16})^2, \quad 0 \leq i \leq 15$$

Ergeben sich nun folgende
neue Trenneigenschaften:
**Nach bereits 4 Iterationen
der Abbildung ω ist die
dazugehörige
Merkmalmenge vollständig!**

Merkmalmenge	sep. Muster	$\Delta = A_s / A_B$
\tilde{x}_0, \tilde{x}_1	66	0,02
$\tilde{x}_0 \circ \omega^1, \tilde{x}_1 \circ \omega^1$	906	0,22
$\tilde{x}_0 \circ \omega^2, \tilde{x}_1 \circ \omega^2$	3630	0,88
$\tilde{x}_0 \circ \omega^3, \tilde{x}_1 \circ \omega^3$	4086	0,99
$\tilde{x}_0 \circ \omega^4, \tilde{x}_1 \circ \omega^4$	4116	1,00

Verbesserung der Trenneigenschaften für Transformationen aus der Klasse \mathbb{CT} bei Binärmustern der Dimension $N=16$

Transformationen	RT	(+,x)	BT	$ A $
Separierbare Muster A_s	225	230	168	1876
$\Delta=A_s/A_B$	0,055	0,056	0,041	0,456

Transformationen	separierbare Muster	Δ
RT	225	0,05
RT ω_1	3682	0,89
RT $\omega_1 \omega_1$	4116	1,00
RT ω_2	4088	0,99
RT $\omega_2 \omega_2$	4116	1,00
RT ω_3	4116	1,00

Mit den folgenden schwach kommutativen Abbildungen:

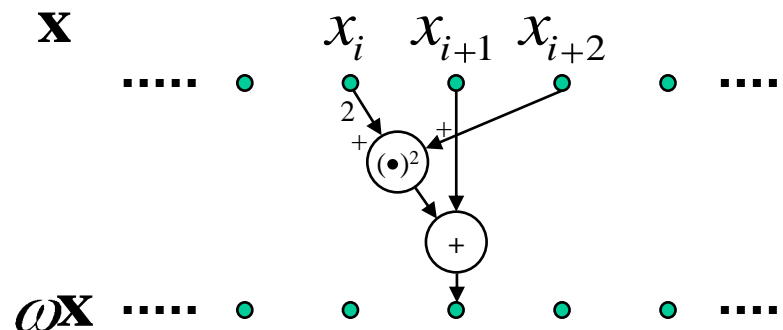
$$(\omega_1 \mathbf{x})_i = x_i + \left(\sum_{i=0}^{15} x_i \right) (2x_{(i+1) \bmod 16} + x_{(i+2) \bmod 16})^2$$

$$(\omega_2 \mathbf{x})_i = x_i + (x_{(i+1) \bmod 16} + 2x_{(i+2) \bmod 16} + 3x_{(i+3) \bmod 16})^2$$

$$(\omega_3 \mathbf{x})_i = x_i + (x_{(i+1) \bmod 16} + 2x_{(i+2) \bmod 16} + 3x_{(i+3) \bmod 16} + 4x_{(i+4) \bmod 16})^2$$

Diese Abbildungen sind weitgehend willkürlich gewählt!

Zum Beispiel:



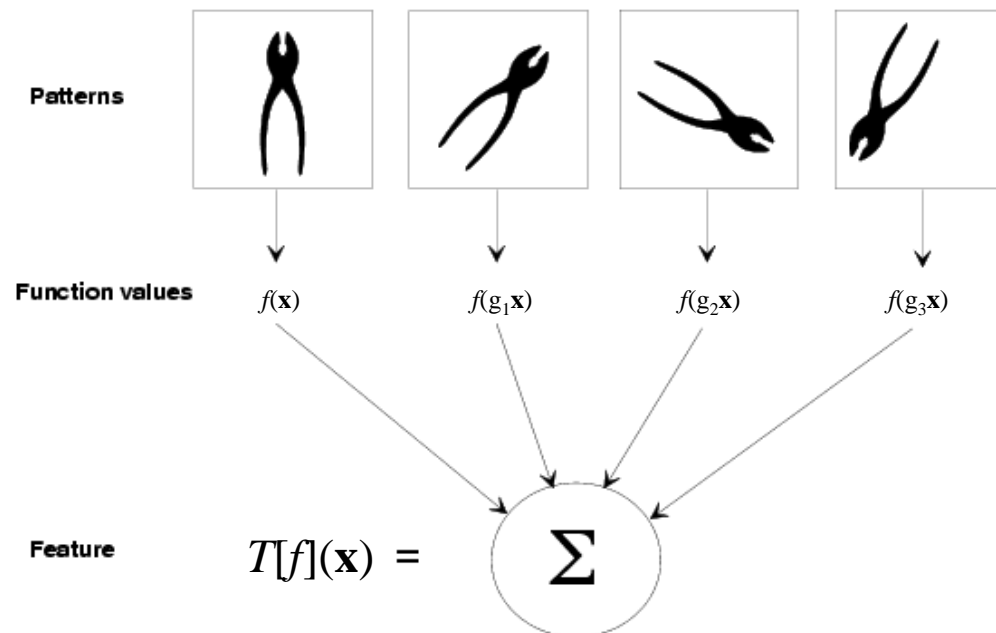
Ausserdem kann allgemein gezeigt werden, dass man bei der Gruppe der zyklischen Translationen der Länge N mit maximal $(N+1)$ geeignet gewählten Merkmalen Vollständigkeit erzielen kann.

Die Separierbarkeit ist in der Regel schon bei weniger Merkmalen gegeben!

Invarianten durch Gruppenmittelung über die *Euklidsche Bewegung*

Invarianten können unter Einsatz beliebiger Funktionen f durch Integration über die die Bewegungsgruppe gewonnen werden:

$$I[f](\mathbf{x}) = \int_G f(g\mathbf{x}) dg$$



Integralinvarianten für die Gruppe der ebenen Bewegungen mit *lokalen* Funktionen

Für die zyklische ebene Bewegung gilt:

$$g(t_0, t_1, \varphi) \mathbf{x}[i, j] = \mathbf{x}[k, l]$$

mit:

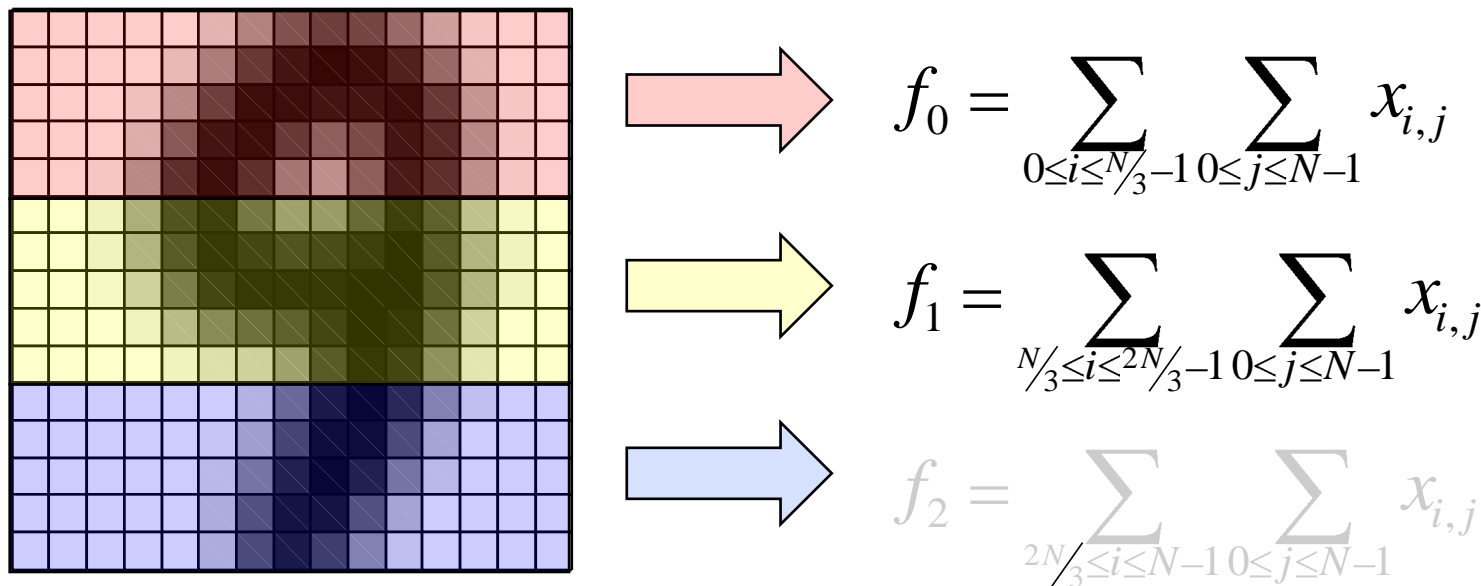
$$\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \end{pmatrix}$$

Alle Indizes müssen modulo der Bilddimension verstanden werden!

$$T[f](\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi NM} \int_{t_0=0}^N \int_{t_1=0}^M \int_{\varphi=0}^{2\pi} f(g\mathbf{x}) d\varphi dt_1 dt_0$$

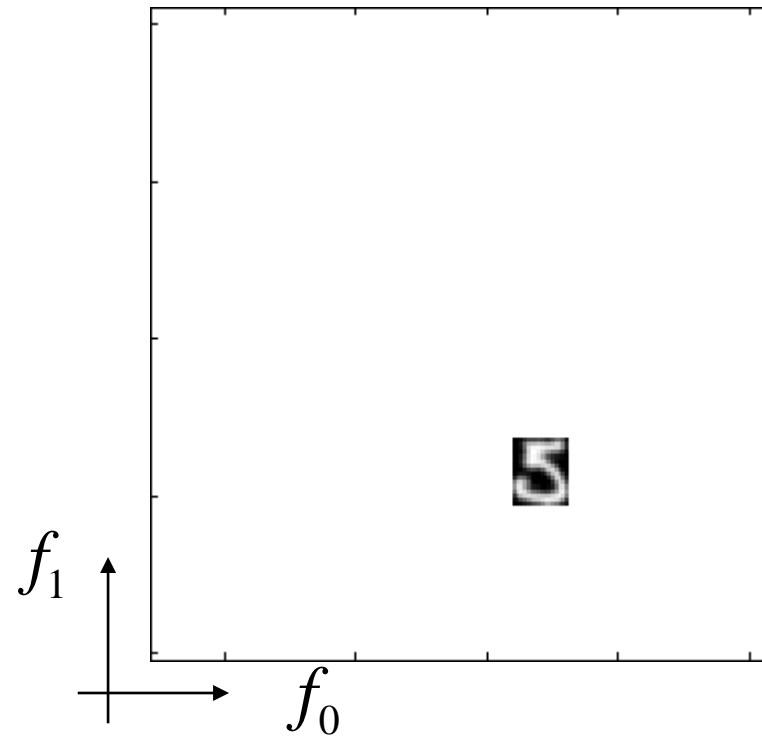
Wahl geeigneter Kernfunktionen?

Demo: lineare Merkmalkernfunktionen für rotierende handgeschriebene Ziffer



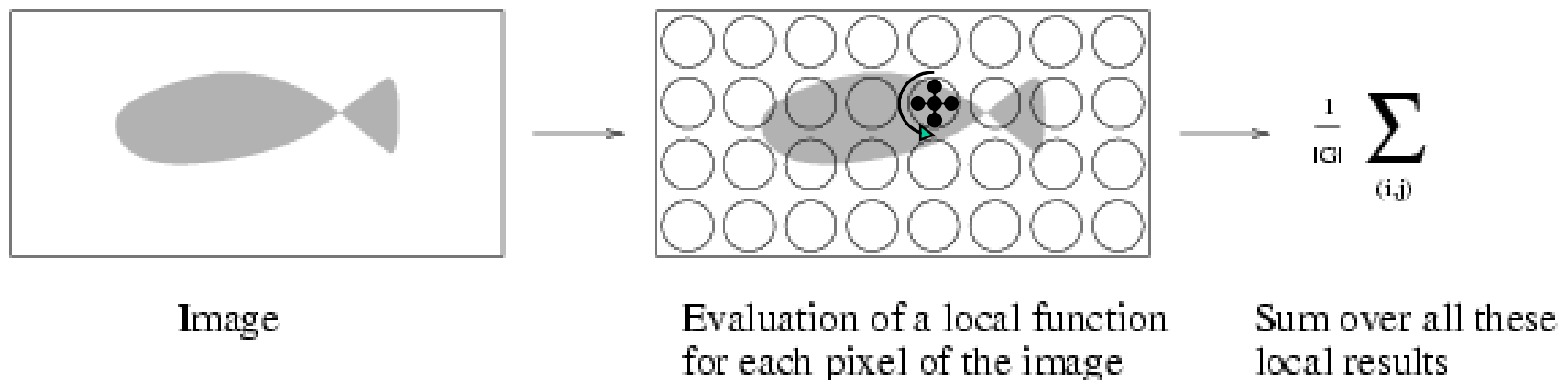
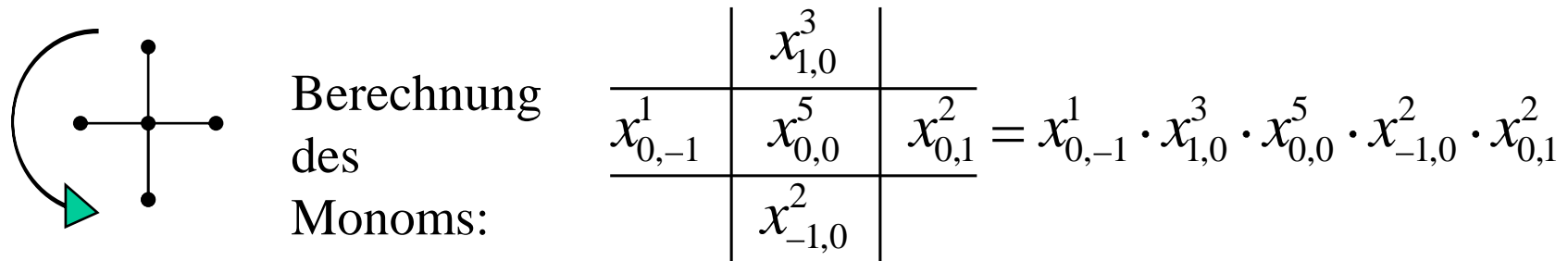
R. Herbrich (2004)

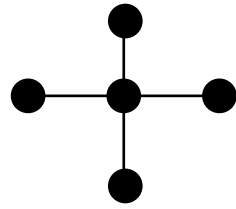
Orbits von Merkmalen



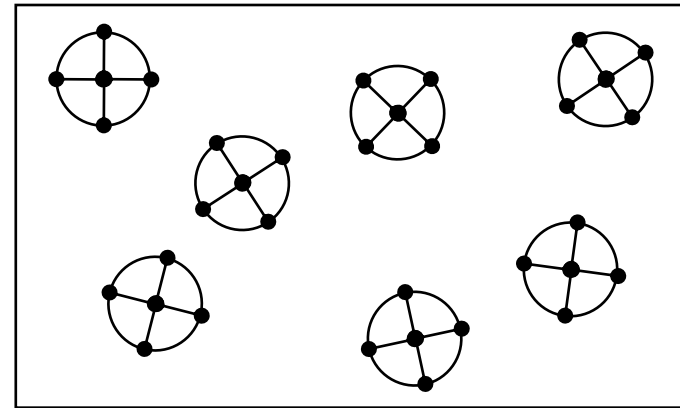
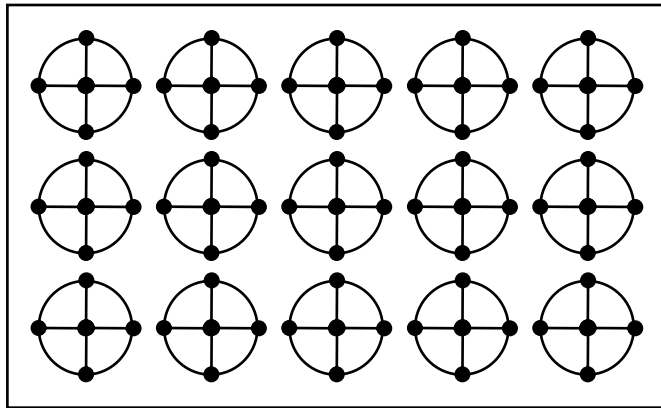
[orbit\orbit.html](#)

Es stellt sich nun heraus, dass f und g *vertauschbar* sind, d.h. man führt die i.allg. lokale Funktion mit einer Euklidschen Bewegung über das ganze Bild. Näherung der Integration durch eine Summation auf dem Pixelraster und einer Rotation um eine endliche Anzahl von Winkeln, bei bilinearer Interpolation der Zwischenwerte.





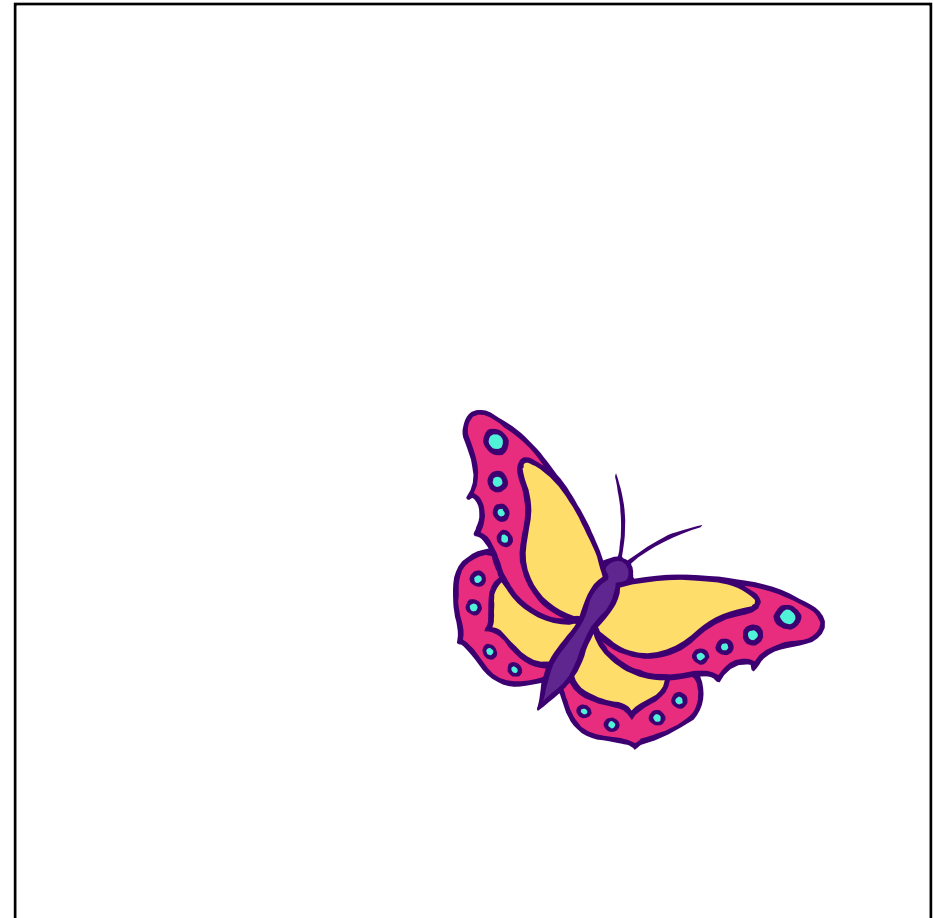
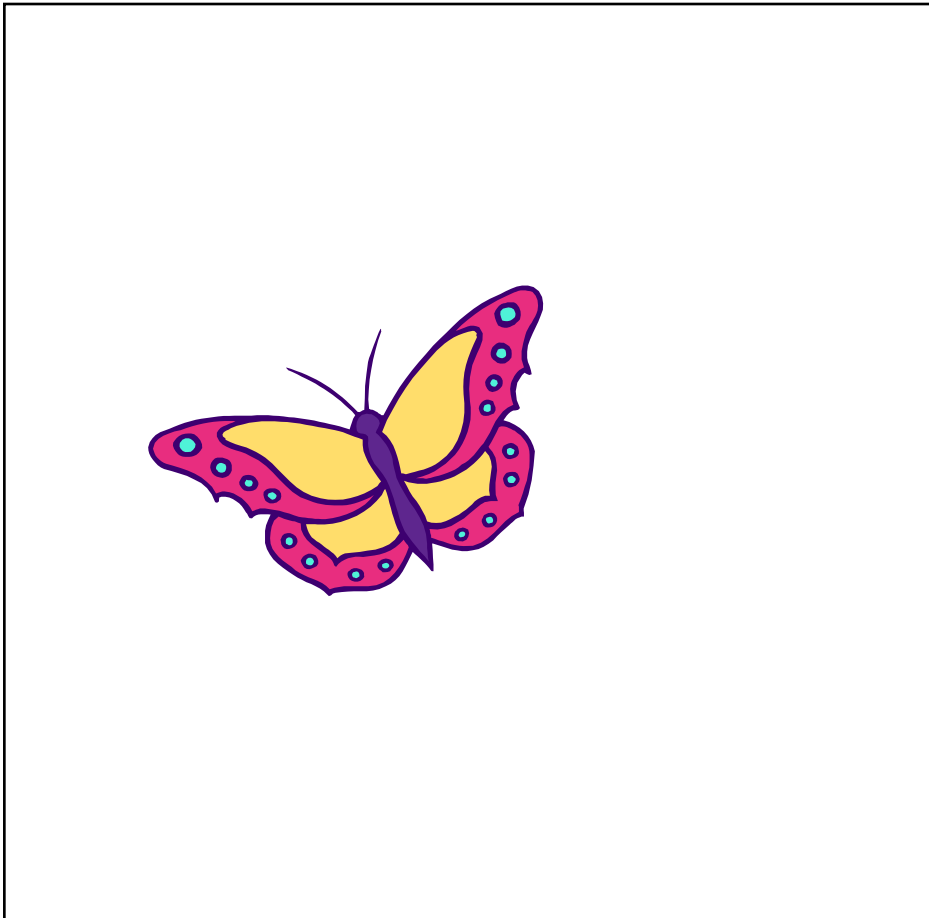
Monom



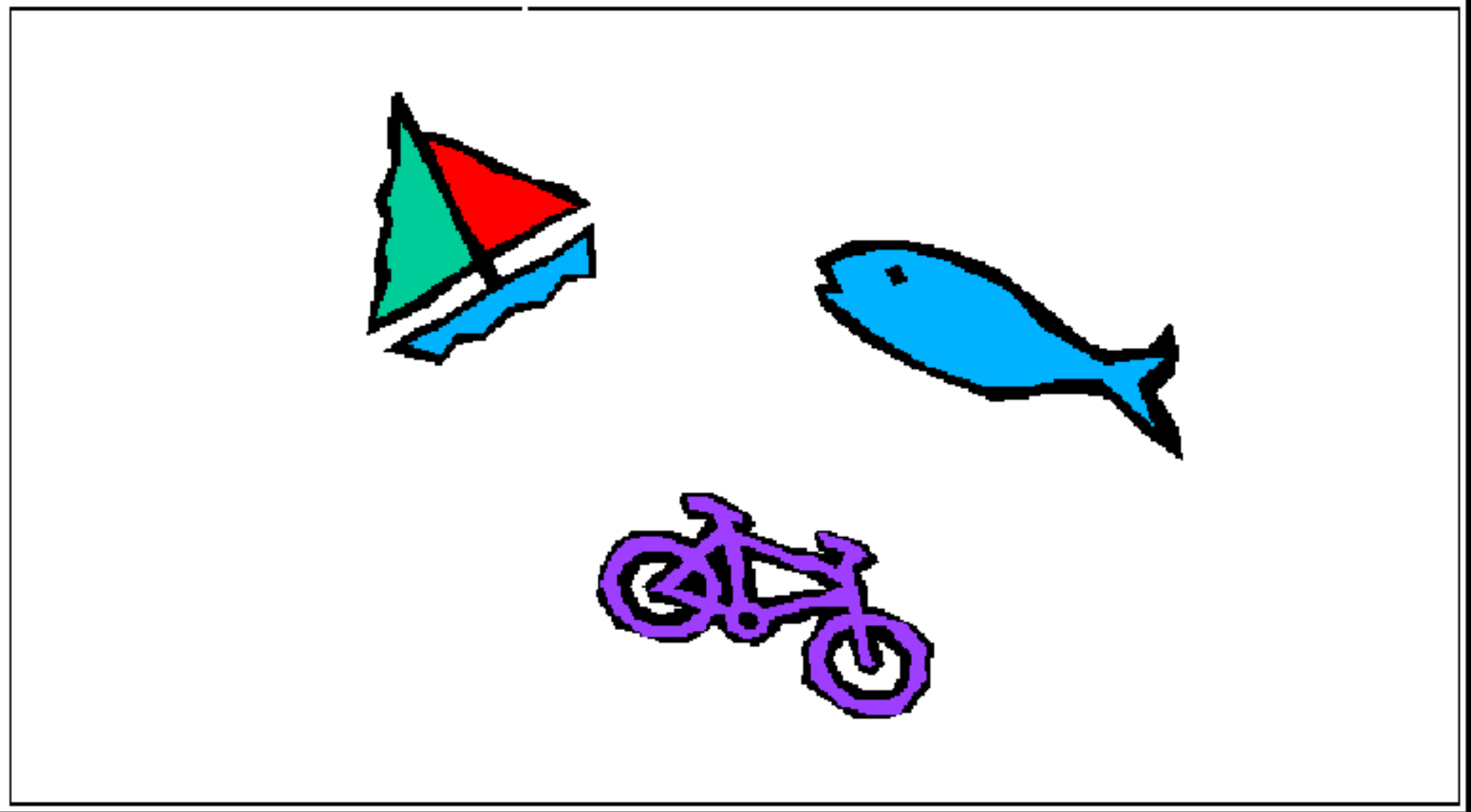
Deterministisches
Integral über Euklidische
ebene Bewegung

Monte-Carlo-Integration

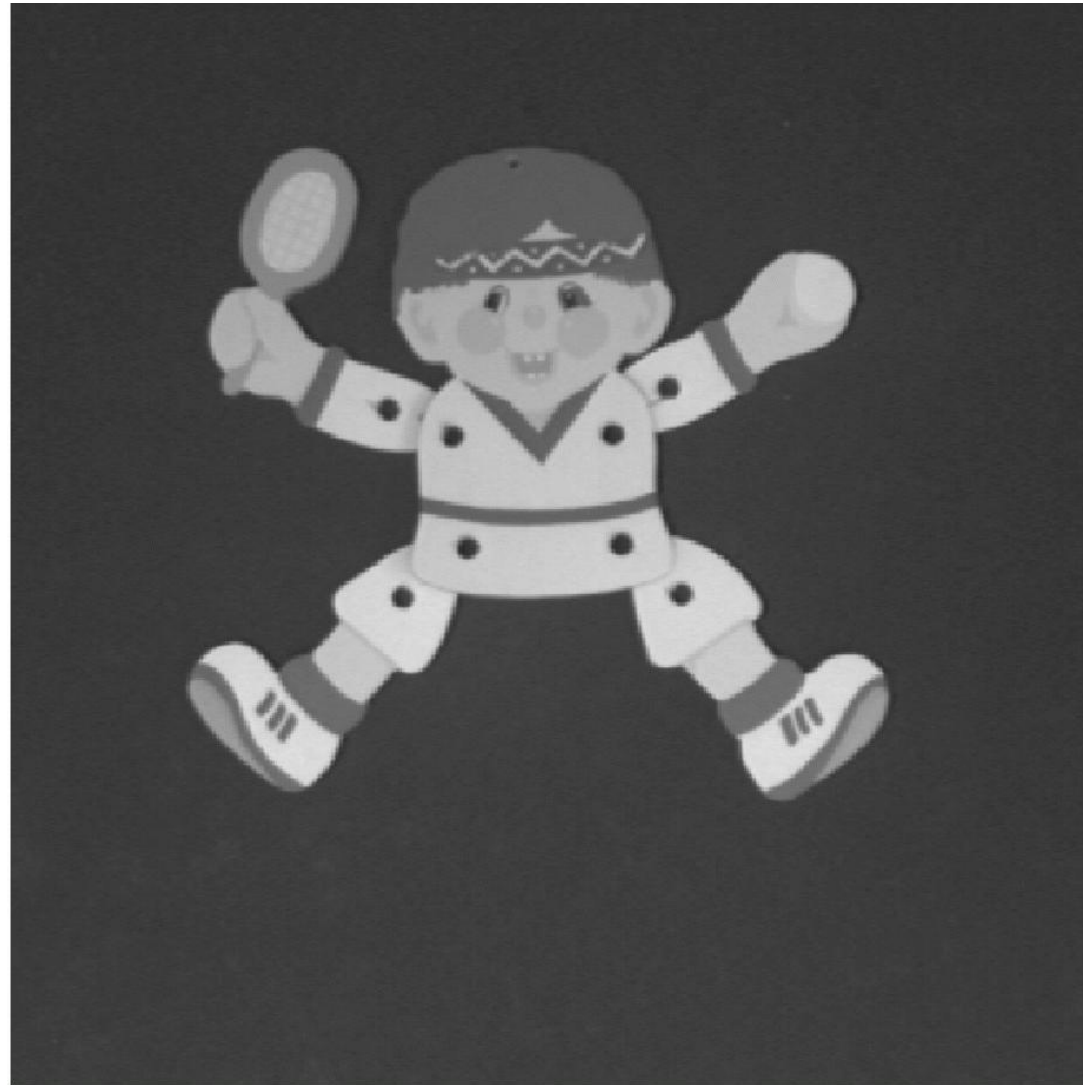
Invarianz bezüglich einer globalen Euklidischen Bewegung (Translation and Rotation)



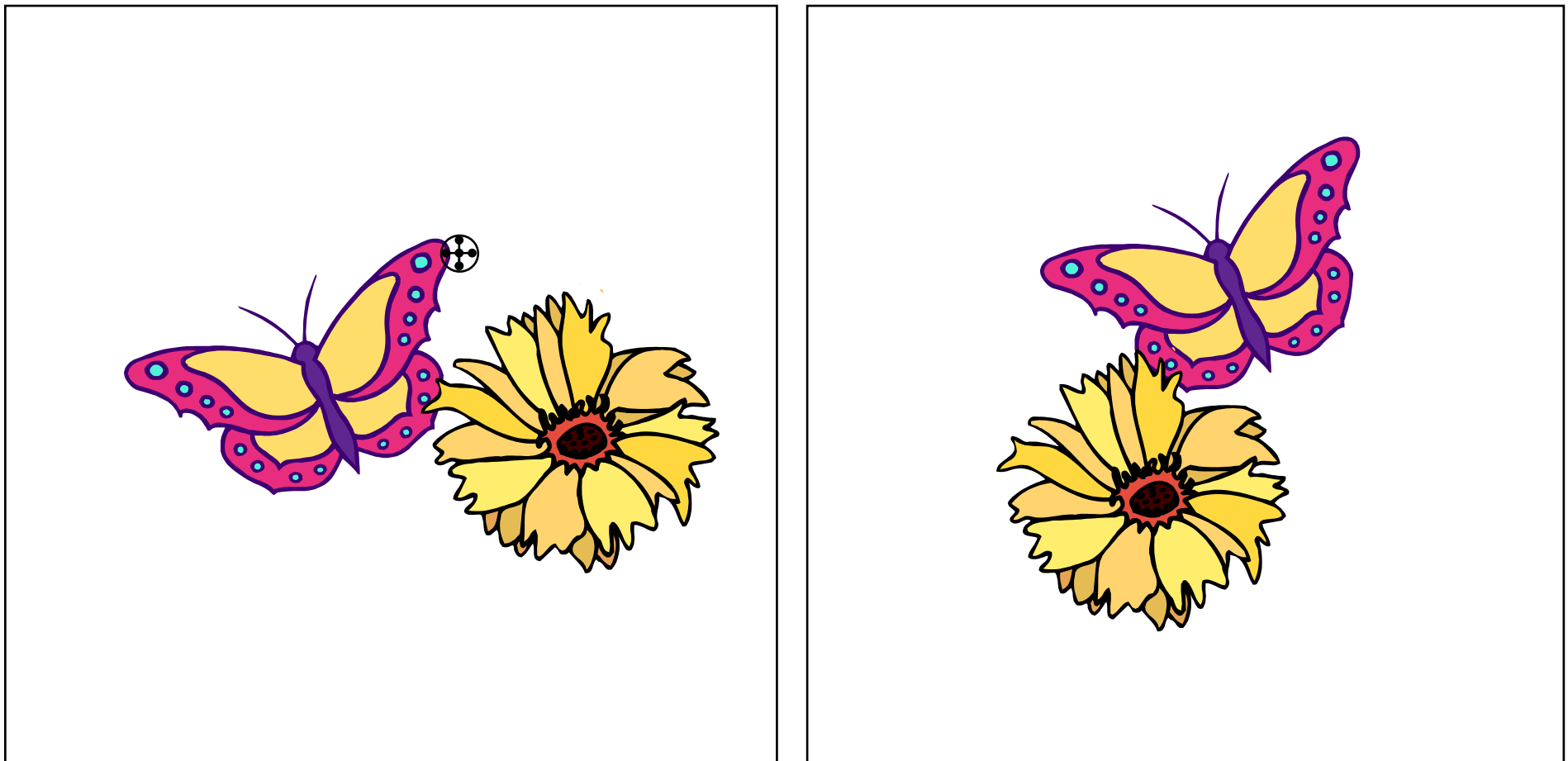
Äquivalenzklasse für Objekte mit unabhängiger
Euklidischer Bewegung
(Benutzung von Funktionen mit lokalem
Definitionsbereich)



Erkennung von Objekten mit Gelenken



Erkennung zweier Objekte in einer Szene ohne zu segmentieren



Robustheit gegenüber topologischen Deformationen

