

# Kapitel 5

## Allgemeine Ansätze zur Berechnung von Invarianten

# Die drei kanonischen Möglichkeiten zur Berechnung von Invarianten (notwendige Bedingungen)

## 1) Integration über die Transformationsgruppe (Haar-Integral, Hurwitz 1897)

$$I = \int_g f(g(\mathbf{p})\mathbf{x}) dg$$

z.Bsp.  $f$ : Polynome

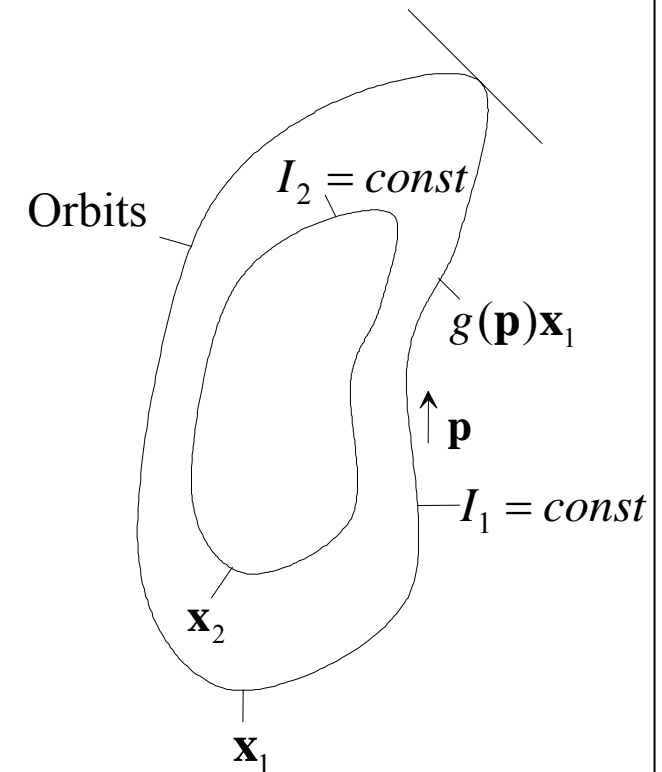
## 2) Differenzieller Ansatz

$$\left. \frac{\partial I(g(\mathbf{p})\mathbf{x})}{\partial p_i} \right|_{p=0} \equiv 0 \equiv 0 \text{ für beliebige } \mathbf{p}$$

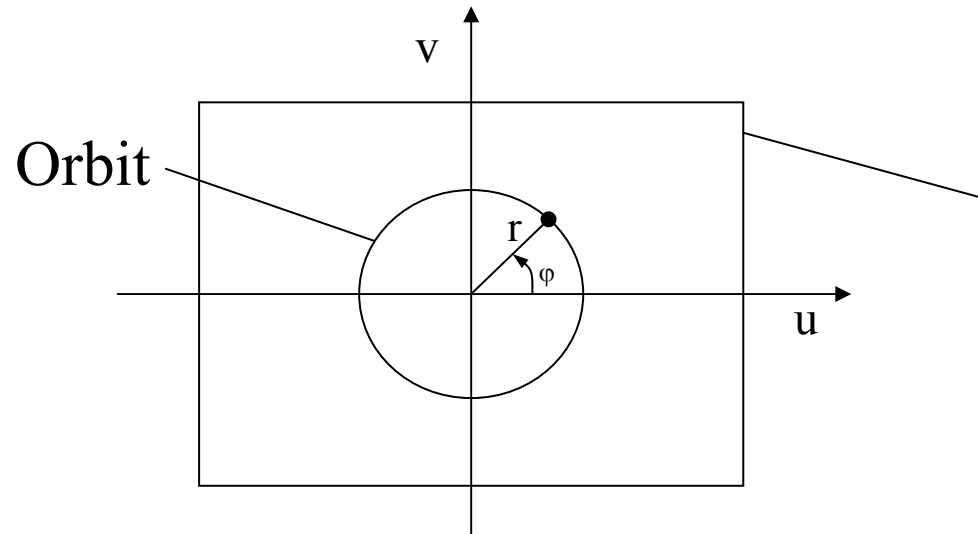
löse die entspr. partiellen Dgl.  $\Rightarrow$  Lie-Theorie

## 3) Normalisierung

reduziere die Darstellung auf extremale Punkte der Orbits, z.Bsp. Auf den Punkt maximaler Krümmung (Schwerpunktnormierung, FDen)



# Beispiel für den differentiellen Ansatz



Graubild

$X(u, v)$  bzw.  $X(r, \varphi)$

$u = r \cos(\varphi)$

$v = r \sin(\varphi)$

Gesucht sind Invarianten für die Drehgruppe  $\mathcal{G}(\varphi)$ :

$$g(\varphi)X(u, v) = X(u \cos \varphi - v \sin \varphi, u \sin \varphi + v \cos \varphi)$$

Gesucht ist eine Funktion  $f$  mit der Eigenschaft:

$$\frac{df(g(\varphi)X(u, v))}{d\varphi} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{Kettenregel}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u} (-u \sin \varphi - v \cos \varphi) + \frac{\partial f}{\partial v} (u \cos \varphi - v \sin \varphi) = 0$$

$$\varphi = 0: \quad \boxed{-v \frac{\partial f}{\partial u} + u \frac{\partial f}{\partial v} = 0}$$

Diese partielle Dgl. wird gelöst durch:

$$f(u, v) = u^2 + v^2 = r^2$$

D.h. alle Funktionen, die nur vom Radius  $r$ , aber nicht vom Winkel  $\varphi$  abhängen sind zulässige invariante Merkmale für die Drehgruppe, also z. B. das Integral über ein Kreissegment, oder auch alle höheren Momente:

$$M_n = \int_{r=0}^R \int_{\varphi=0}^{2\pi} r^n X(r, \varphi) d\varphi dr$$

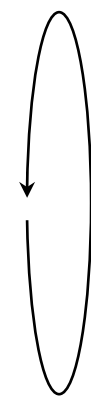
Diese Momente sind invariant, jedoch nicht vollständig.

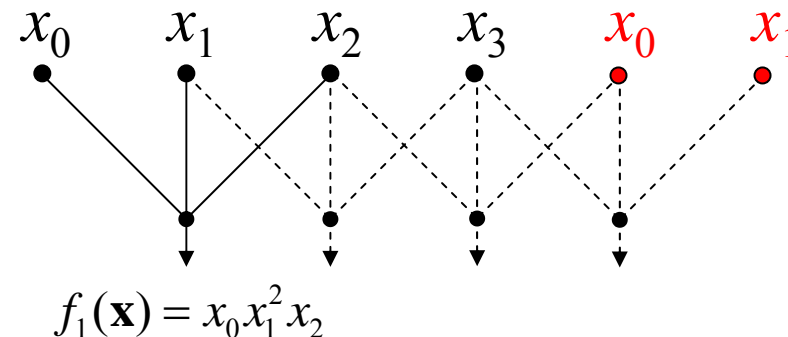
Schwierigkeit der differentiellen Methodik:

Die Notwendigkeit partielle Differentialgleichungen zu lösen (falls die Gruppe mehr als einen Parameter hat)

# Integration über die endliche Gruppe der Translationen

Bei endlichen Gruppen geht die Integration über in eine Summation über die Gruppe (sog. Gruppenmittel). Es werden bevorzugt polynomiale Funktionen mit lokalem Definitionsbereich (functions of finite support) bevorzugt, also z.Bsp. Für  $N=4$ :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$




Ein Monom, ist ein Polynom von der Form

$$P(\mathbf{x}) = x_0^{d_0} x_1^{d_1} \cdots x_{n-1}^{d_{n-1}}$$

Die Summe  $d = \sum_{i=0}^{n-1} d_i$  wird als Grad des Monoms bezeichnet.

Durch Summation über die Gruppe ergibt sich ein invariantes Merkmal zu:

$$\tilde{x}_1(f_1(\mathbf{x})) = x_0 x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2 x_0 + x_3 x_0^2 x_1$$

Der Nachweis der Invarianz ist einfach nachzuprüfen durch zyklische Permutation der Indizes:  $f(\tau_1(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x})$

Eine noch einfachere Invariante ergibt sich durch Summation über das Monom ersten Grades  $f_0 = x_0$  zu:

$$\tilde{x}_0(f_0(\mathbf{x})) = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 \quad (\text{einfacher Mittelwert})$$

# Vollständigkeit für endliche Gruppen

(Emmy Noether, 1916)

Für endliche Gruppen  $\mathcal{G}$  mit  $|\mathcal{G}|$  Elementen und Muster der Dimension  $N$  erhält man vollständige Merkmale, oder eine Basis, wenn man über alle Monome vom Grad  $\leq |\mathcal{G}|$  summiert. Die Anzahl der Monome ist gegeben durch:

$$\binom{N + |\mathcal{G}|}{N}$$



1882-1935

Dies ist eine obere Schranke, welche Vollständigkeit garantiert; praktisch kann Vollständigkeit bereits für wesentlich weniger Elemente existieren.

Bei der Translationsgruppe erhält man mit  $\dim(x) = |\mathcal{G}| = N$ :

$$\binom{2N}{N} = \frac{(2N)!}{(N!) \cdot (N!)}$$

Für  $N = 4$  sind das  $\frac{8!}{(4!) \cdot (4!)} = 70$  und für  $N = 8$  bereits  $\frac{16!}{(8!)^2} = 12.870$

# Orbits für Binärmuster der Dimension $N=4$ bzgl. zyklischer Translationen

Orbits	Muster			
$O_0$	$(0, 0, 0, 0)^T$			
$O_1$	$(0, 0, 0, 1)^T$	$(0, 0, 1, 0)^T$	$(0, 1, 0, 0)^T$	$(1, 0, 0, 0)^T$
$O_2$	$(0, 0, 1, 1)^T$	$(0, 1, 1, 0)^T$	$(1, 1, 0, 0)^T$	$(1, 0, 0, 1)^T$
$O_3$	$(0, 1, 0, 1)^T$	$(1, 0, 1, 0)^T$		
$O_4$	$(0, 1, 1, 1)^T$	$(1, 1, 1, 0)^T$	$(1, 1, 0, 1)^T$	$(1, 0, 1, 1)^T$
$O_5$	$(1, 1, 1, 1)^T$			



# Translationsinvarianz bei Binärmustern der Länge $N=4$

Berechne aus Gründen der Vollständigkeit alle Gruppenmittel vom Grad  $\leq 4$ . Da wir über die zyklischen Translationen mitteln, können die Monome, welche aus einer zyklischen Translation der Eingangsdaten auseinander hervorgehen, unberücksichtigt bleiben. Beachtet man außerdem, dass für Binärmuster gilt:

$$x_i^{d_j} = x_i \quad \text{für } \forall d_j > 0, x_i \in \{0, 1\}$$

So sind die folgenden Monome zu betrachten:

$$f_0(\mathbf{x}) = x_0$$

offensichtlich ist  $f_5(\mathbf{x})=1$  von wenig  
praktischem Nutzen

$$f_1(\mathbf{x}) = x_0 x_1$$

$$f_2(\mathbf{x}) = x_0 x_2$$

$x_0 x_1 x_2$  z.Bsp. erhält man durch

$$f_3(\mathbf{x}) = x_0 x_1 x_2$$

zykl. Transl. aus  $x_0 x_2 x_3 = x_{\langle 0+2 \rangle} x_{\langle 1+2 \rangle} x_{\langle 2+2 \rangle}$

$$f_4(\mathbf{x}) = x_0 x_1 x_2 x_3$$

# Gruppenmittel

Aus diesen Monomen berechnen sich die folgenden Gruppenmittel:

$$\tilde{x}_0 = T(f_0(\mathbf{x})) = (x_0 + x_1 + x_2 + x_3)$$


$$\tilde{x}_1 = T(f_1(\mathbf{x})) = (x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_0)$$

$$\tilde{x}_2 = T(f_2(\mathbf{x})) = (x_0x_2 + x_1x_3 + x_2x_0 + x_3x_1) = 2(x_0x_2 + x_1x_3)$$

$$\tilde{x}_3 = T(f_3(\mathbf{x})) = (x_0x_1x_2 + x_1x_2x_3 + x_2x_3x_0 + x_3x_0x_1)$$

$$\tilde{x}_4 = T(f_4(\mathbf{x})) = 4x_0x_1x_2x_3$$

Daraus resultieren die folgenden Invarianten für die verschiedenen

Orbits:	Orbits		$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4$
	$O_0$	0	0	0	0
	$O_1$	1	0	0	0
	$O_2$	2	1	0	0
	$O_3$	2	0	2	0
	$O_4$	3	2	2	1
	$O_5$	4	4	4	4

Man erkennt, dass bereits die beiden Merkmale  $\tilde{x}_0$  und  $\tilde{x}_1$  einen vollständigen Merkmalsraum aufspannen!

# Geometrische Veranschaulichung der Gruppenmittel: *Schnitt von Mannigfaltigkeiten*

Gruppenmittel für die *Translation* bei  $N=2$ :

$$\text{Orbit: } O \left( \underbrace{\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_1} \right) = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_2} \right\}$$

Spiegelung an 1. Winkelhalbierenden

1. geometrischer Ort mit linearen

Gruppenmitteln  $f_0 = x_0$  :

$\tilde{x}_0 = x_0 + x_1 = \sqrt{2} \langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle = c_0$  (Gerade  $\perp$  auf  $\mathbf{u}$ )  
noch mehrdeutig!

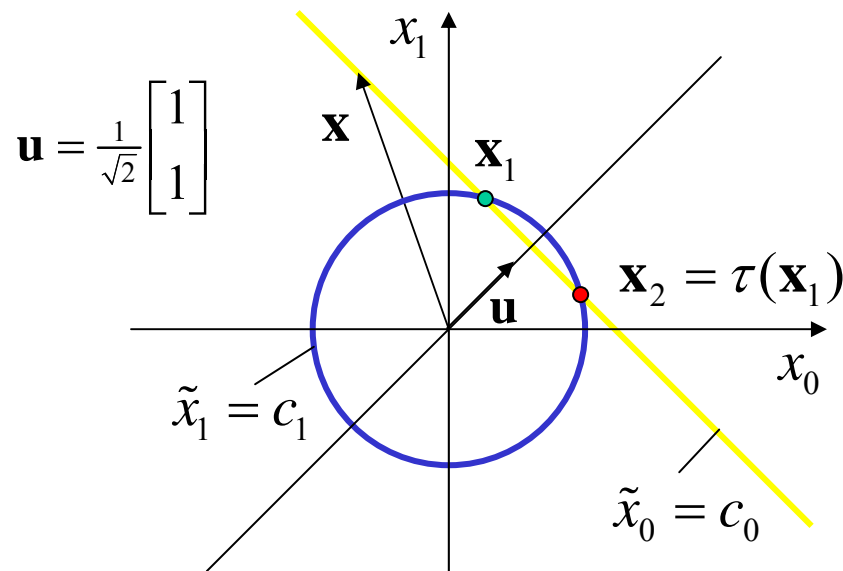
2. geometrischer Ort mit quadratischen

Gruppenmitteln  $f_1 = x_0^2$  :

$\tilde{x}_1 = x_0^2 + x_1^2 = c_1$  (Kreis)

Schnittpunkt beider geometrischer Örter ergibt  
genau die Vektoren der Äquivalenzklasse:

$$\Rightarrow \tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{x}_1 \end{bmatrix} \text{ ist vollständig!}$$



# Eine weitere *lineare* Invariante löst nicht das Problem!

Wählt man z.B. eine andere Multilinearform der Art  $f_1 = 2x_0 + x_1$  so erhält man nach der Gruppenmittelung:  $\tilde{x}_1 = (2x_0 + x_1) + (2x_1 + x_0) = 3(x_0 + x_1)$

Diese Invariante ist aber nicht von neuer Qualität im Vergleich zu:

$$\tilde{x}_0 = x_0 + x_1 \sim \tilde{x}_1$$

# Wahl einer alternativen Mannigfaltigkeit 2. Grades

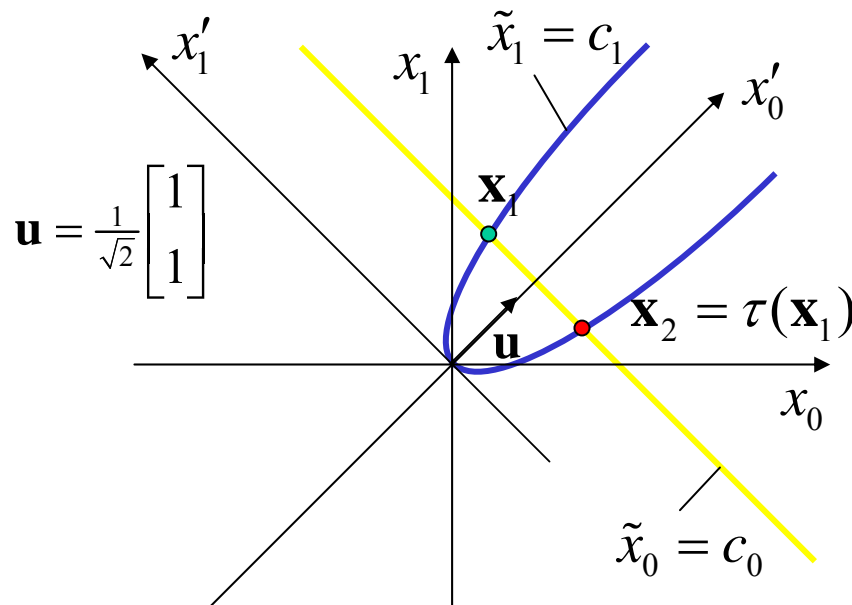
1. geometrischer Ort mit linearen Gruppenmitteln  $f_0 = x_0$  :

$$\tilde{x}_0 = x_0 + x_1 = \sqrt{2} \langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle = c_0 \quad (\text{Gerade } \perp \text{ auf } \mathbf{u}) \text{ noch mehrdeutig!}$$

2. geometrischer Ort mit Parabel symmetrisch zur  $x'_0$ -Achse:  $x'_0 = kx_1'^2$

und mit  $x'_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_0 + x_1)$   
 $x'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_0)$  folgt daraus:  $x_0^2 + x_1^2 - 2x_0x_1 - \frac{1}{k}(x_0 + x_1) = 0$

Dies kann als quadratisches Gruppenmittel über  $f_1 = \frac{1}{2}(x_0^2 + x_1^2) - x_0x_1 - \frac{1}{2k}x_0$  erzeugt werden.



$$\frac{\frac{1}{2}(x_0^2 + x_1^2) - x_0x_1 - \frac{1}{2k}x_0}{\frac{1}{2}(x_0^2 + x_1^2) - x_0x_1 - \frac{1}{2k}x_1}$$

$$\tilde{x}_1 = \frac{x_0^2 + x_1^2 - 2x_0x_1 - \frac{1}{k}(x_0 + x_1)}{x_0^2 + x_1^2 - 2x_0x_1 - \frac{1}{k}(x_0 + x_1)}$$

Schnittpunkt beider geometrischer Örter ergibt genau die Vektoren der Äquivalenzklasse:

$$\Rightarrow \tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{x}_1 \end{bmatrix} \text{ ist vollständig!}$$

# Gruppenmittel für die Äquivalenzklasse zyklischer Translationen mit $N=3$

$$\text{Orbit: } \mathcal{O} \left( \underbrace{\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_1} \right) = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_3} \right\} \quad \text{Rotation an der 1. Raumdiagonalen um } 2\pi/3$$

1. geometrischer Ort mit linearen Gruppenmitteln  $f_0 = x_0$  :

$$\tilde{x}_0 = x_0 + x_1 + x_2 = \sqrt{3} \langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle = c_0 \quad (\text{Ebene } \perp \text{ auf } \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{3}} [1 \ 1 \ 1]^T)$$

2. geometrischer Ort mit quadratischen Gruppenmitteln  $f_1 = x_0^2$  :

$$\tilde{x}_1 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = c_1 \quad (\text{Kugel}) \quad \tilde{x}_0 \cap \tilde{x}_1 \text{ ergibt Kreis}$$

3. geometrischer Ort:

a)  $f_2 = x_0 x_1 \Rightarrow$  Gruppenmittel:  $\tilde{x}_2 = x_0 x_1 + x_1 x_2 + x_2 x_0 = c_2$

$\tilde{x}_0 \cap \tilde{x}_1 \cap \tilde{x}_2$  ergibt 6 Punkte (auch invariant gegenüber Spiegelung!)

b) erst die Wahl einer asymmetrischen Funktion führt zur Vollständigkeit:

$$f_2 = x_0^2 x_1 \Rightarrow \text{Gruppenmittel: } \tilde{x}_2 = x_0^2 x_1 + x_1^2 x_2 + x_2^2 x_0 = c_2$$

$\tilde{x}_0 \cap \tilde{x}_1 \cap \tilde{x}_2$  ergibt genau die 3 Punkte der Äquivalenzklasse!

Start der Matlab-Demo  
[matlab-MF.bat](#)

# Gruppenmittel für die Äquivalenzklasse zyklischer Translationen mit $N=3$

$$\text{Orbit: } \mathcal{O} \left( \underbrace{\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_1} \right) = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_3} \right\} \quad \text{Rotation an der 1. Raumdiagonalen um } 2\pi/3$$

1. geometrischer Ort mit linearen Gruppenmitteln  $f_0 = x_0$  :

$$\tilde{x}_0 = x_0 + x_1 + x_2 = \sqrt{3} \langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle = c_0 \quad (\text{Ebene } \perp \text{ auf } \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{3}} [1 \ 1 \ 1]^T)$$

2. geometrischer Ort mit quadratischen Gruppenmitteln  $f_1 = x_0^2$  :

$$\tilde{x}_1 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = c_1 \quad (\text{Kugel}) \quad \tilde{x}_0 \cap \tilde{x}_1 \text{ ergibt Kreis}$$

3. geometrischer Ort:

a)  $f_2 = x_0^3 \Rightarrow$  Gruppenmittel:  $\tilde{x}_2 = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 = c_2$

$\tilde{x}_0 \cap \tilde{x}_1 \cap \tilde{x}_2$  ergibt 6 Punkte (auch invariant gegenüber Spiegelung!)

b) erst die Wahl einer asymmetrischen Funktion führt zur Vollständigkeit:

$$f_2 = x_0^2 x_1 \Rightarrow \text{Gruppenmittel: } \tilde{x}_2 = x_0^2 x_1 + x_1^2 x_2 + x_2^2 x_0 = c_2$$

$\tilde{x}_0 \cap \tilde{x}_1 \cap \tilde{x}_2$  ergibt genau die 3 Punkte der Äquivalenzklasse!

Start der Matlab-Demo  
[matlab-MF.bat](#)

# Schnitt von Mannigfaltigkeiten

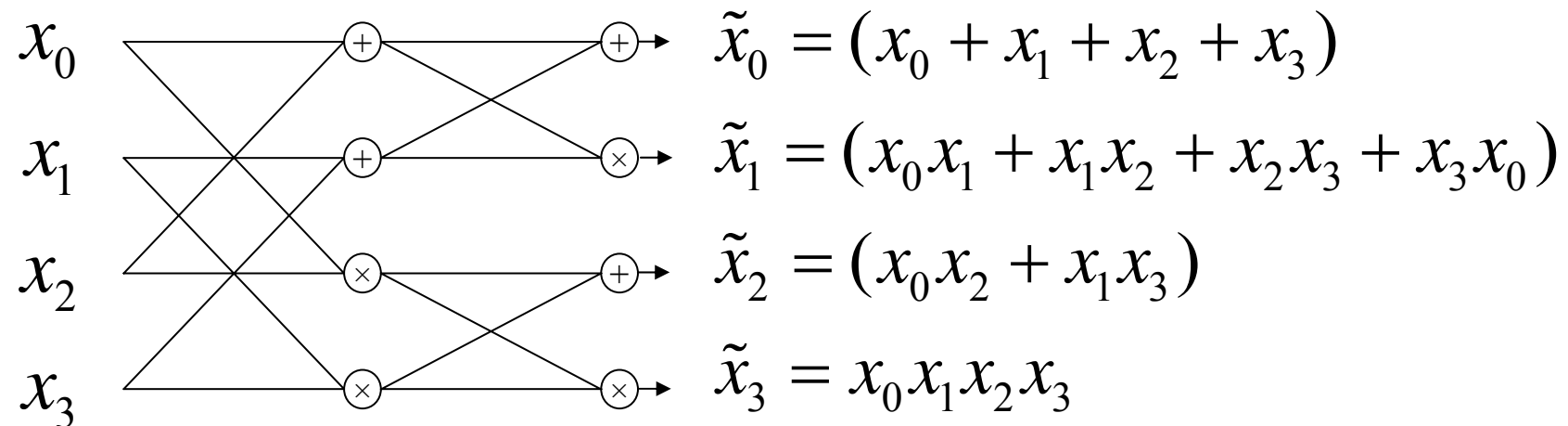
$$\begin{array}{lll} \tilde{x}_0(x_0, x_1, x_2) = c_0 & \Rightarrow & \text{1. Hyperfläche} \quad g_0(x_0, x_1, x_2, c_0) = 0 \\ \tilde{x}_1(x_0, x_1, x_2) = c_1 & \Rightarrow & \text{2. Hyperfläche} \quad g_1(x_0, x_1, x_2, c_1) = 0 \\ \vdots & & \vdots \\ & & g_0 \cap g_1 \cap g_2 \cdots \end{array}$$

- Die notwendige Bedingung garantiert, dass alle Mannigfaltigkeiten durch die Punkte der Äquivalenzklasse gehen.
- Nimmt man mehr und mehr unabhängige Invarianten hinzu, so wird in der Regel die Schnittmenge verkleinert und damit steigt der Grad der Vollständigkeit (die Hyperflächen schneiden sich in immer weniger Punkten bzw. in Mannigfaltigkeiten geringerer Dimension).



# Beziehungen zur Klasse $\mathbb{CT}$

Berechnet man Invarianten von der Klasse  $\mathbb{CT}$  mit den Funktionen  $f_1=a+b$  und  $f_2=a \times b$  so ergibt sich für  $N=4$ :



Dies ist aber genau eine Teilmenge von Invarianten, welche man mit der Gruppenmittelung über Monome erhalten würde, hier jedoch mit einem schnellen Algorithmus der Komplexität  $O(N \log N)$  anstatt  $O(N^2)$  berechnet.

# Verbesserung der Trenneigenschaften (Grad der Vollständigkeit) durch Vergrößerung des Musterraumes mit Hilfe schwach kommutativer Vorverarbeitungsabbildungen $\omega_1$ (siehe dazu auch die Ausführungen im Kapitel SVM)

Definition der schwachen Kommutativität: Eine Abbildung  $\omega : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  des Musterraumes  $\mathcal{X}$  auf sich heißt schwach kommutativ, falls zu jedem  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$  und  $g_1 \in \mathcal{G}$  ein  $g_2 \in \mathcal{G}$  mit der folgenden Eigenschaft existiert:

$$\omega g_1 \mathbf{x} = g_2 \omega \mathbf{x}$$

Lemma: Sei  $\omega : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  eine schwach kommutative Abbildung und  $T$  eine invariante Abbildung, dann bilden  $T \circ \omega$  ebenfalls Invarianten.

Beweis: Für alle  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ ,  $g_1 \in \mathcal{G}$  gilt:

$$(T \circ \omega)(g_1 \mathbf{x}) = T(\omega g_1 \mathbf{x}) = T(g_2 \omega \mathbf{x}) = T(\omega \mathbf{x}) = (T \circ \omega)(\mathbf{x})$$

Betrachtet werden wiederholte (iterative) Anwendungen von  $\omega$  :  
 $T \circ \omega$  ,  $T \circ \omega \circ \omega$  , ... (dabei wird der Raum weiter aufgebläht mit  
Polynomtermen höheren Grades - "Kerntrick")

# Konstruktion von schwach kommutativen Vorverarbeitungsabbildungen

Lemma:

Jede Linearkombination aus schwach kommutativen Abbildungen ist selbst schwach kommutativ.

Vergleiche dazu auch die Vorgehensweise bei der Definition von  $\mathbb{C}T_2$  und  $\mathbb{C}T_3$  mit allgemein *verträglichen Permutationen*  $\omega_i$  als zulässige Vorverarbeitung:

$$\mathbb{C}T_3 := \underbrace{\mathbb{C}T_{zs} \cup \mathbb{C}T_{sz}}_{\mathbb{C}T_2} \cup \mathbb{C}T_{DI}$$

$$\Rightarrow \mathbb{I}_{\mathbb{C}T_3} := \mathbb{I}_{\mathbb{C}T_{zs}} \cap \mathbb{I}_{\mathbb{C}T_{sz}} \cap \mathbb{I}_{\mathbb{C}T_{DI}}$$

Wobei:

$$\mathbb{C}T_{sz} = \mathbb{C}T_{zs} \circ \omega_T \circ \mathbf{X}$$

$$\mathbb{C}T_{DI} = \mathbb{C}T_{zs} \circ \omega_{DI} \circ \mathbf{X}$$

# Invarianten für die Gruppe der zyklischen Translationen für Binärmuster der Dimension $N=16$

Man erhält  $2^{16} = 65.536$  unterschiedliche Binärmuster.

Mit Hilfe der Pólya-Theorie lässt sich zeigen, dass es genau die folgende Zahl von unterscheidbaren Orbits oder Äquivalenzklassen gibt:

$$A_B = \frac{1}{N} \sum_{k|N} \varphi(k) 2^{\frac{N}{k}} \Big|_{N=16} = 4116$$

Die Summe geht über alle Teiler  $k$  von  $N$ .  $\varphi$  ist die Eulersche  $\varphi$ -Funktion (Die Eulersche  $\varphi$ -Funktion  $\varphi(n)$  gibt die Anzahl aller natürlichen Zahlen  $k$  mit  $1 \leq k \leq n$ , für die  $k$  teilerfremd zu  $n$  ist).

# Trenneigenschaften polynomialer Merkmale

Es wurden folgende 9  
Monome über die  
Gruppe gemittelt:

$$\begin{array}{lll} f_0 = x_0 & f_3 = x_0 x_3 & f_6 = x_0 x_6 \\ f_1 = x_0 x_1 & f_4 = x_0 x_4 & f_7 = x_0 x_7 \\ f_2 = x_0 x_2 & f_5 = x_0 x_5 & f_8 = x_0 x_8 \end{array}$$

Ergeben sich folgende  
Trenneigenschaften:

Mit  $A_s$  gleich der Anzahl  
der separierbaren  
Äquivalenzklassen,  
gleichbedeutend mit der  
Anzahl der voneinander  
verschiedenen  
Merkmalsvektoren.

Merkmalmenge	sep. Muster $A_s$	$\Delta = A_s / A_B$
$\tilde{x}_0$	17	0,004
$\{\tilde{x}_0, \tilde{x}_1\}$	66	0,016
$\{\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2\}$	200	0,049
$\{\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3\}$	501	0,122
$\{\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4\}$	980	0,238
$\{\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4, \tilde{x}_5\}$	1516	0,368
$\{\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4, \tilde{x}_5, \tilde{x}_6\}$	1818	0,442
$\{\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4, \tilde{x}_5, \tilde{x}_6, \tilde{x}_7\}$	1876	0,456
$\{\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4, \tilde{x}_5, \tilde{x}_6, \tilde{x}_7, \tilde{x}_8\}$	1876	0,456

# Verbesserung der Trenneigenschaften polynomialer Merkmale

Mit den folgenden  
zwei Merkmalen:

$$\tilde{x}_0 = x_0 + \dots + x_{15}$$

$$\tilde{x}_1 = (x_0 + x_1)^2 + (x_1 + x_2)^2 + \dots + (x_{15} + x_0)^2$$

Und der schwach  
kommutativen Abb.:

$$(\omega \mathbf{x})_i = x_i + (2x_{(i-1) \bmod 16} + x_{(i+1) \bmod 16})^2, \quad 0 \leq i \leq 15$$

Ergeben sich nun folgende  
neue Trenneigenschaften:

**Nach bereits 4 Iterationen  
der Abbildung  $\omega$  ist die  
dazugehörige  
Merkmalmenge vollständig!**

Merkmalmenge	sep. Muster	$\Delta = A_s / A_B$
$\{\tilde{x}_0, \tilde{x}_1\}$	66	0,02
$\{\tilde{x}_0 \circ \omega^1, \tilde{x}_1 \circ \omega^1\}$	906	0,22
$\{\tilde{x}_0 \circ \omega^2, \tilde{x}_1 \circ \omega^2\}$	3630	0,88
$\{\tilde{x}_0 \circ \omega^3, \tilde{x}_1 \circ \omega^3\}$	4086	0,99
$\{\tilde{x}_0 \circ \omega^4, \tilde{x}_1 \circ \omega^4\}$	4116	1,00

# Verbesserung der Trenneigenschaften für Transformationen aus der Klasse $\mathbb{C}T$ bei Binärmustern

Transformationen	RT	(+,x)	BT	$ F $
Separierbare Muster $A_s$	225	230	168	1876
$\Delta = A_s / A_B$	0,055	0,056	0,041	0,456

Transformationen	separierbare Muster	$\Delta$
RT	225	0,05
$RT \circ \omega_1$	3682	0,89
$RT \circ \omega_1 \circ \omega_1$	4116	1,00
$RT \circ \omega_2$	4088	0,99
$RT \circ \omega_2 \circ \omega_2$	4116	1,00
$RT \circ \omega_3$	4116	1,00



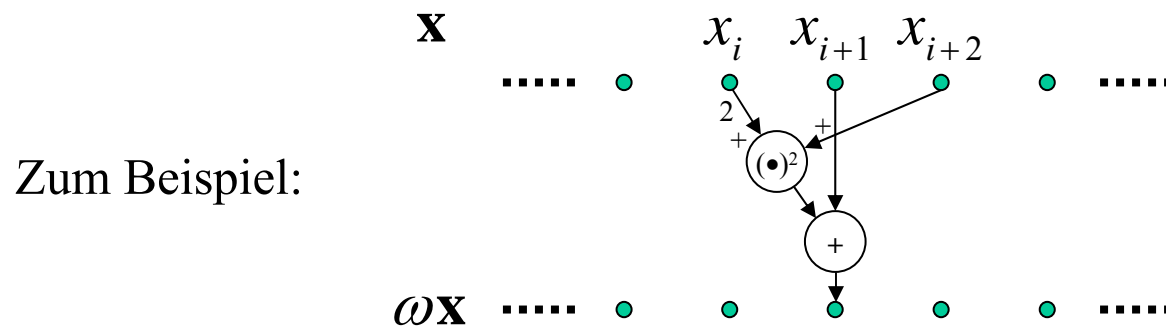
# Mit den folgenden schwach kommutativen Abbildungen:

$$(\omega_1 \mathbf{x})_i = x_i + \left( \sum_{i=0}^{15} x_i \right) (2x_{(i+1) \bmod 16} + x_{(i+2) \bmod 16})^2$$

$$(\omega_2 \mathbf{x})_i = x_i + (x_{(i+1) \bmod 16} + 2x_{(i+2) \bmod 16} + 3x_{(i+3) \bmod 16})^2$$

$$(\omega_3 \mathbf{x})_i = x_i + (x_{(i+1) \bmod 16} + 2x_{(i+2) \bmod 16} + 3x_{(i+3) \bmod 16} + 4x_{(i+4) \bmod 16})^2$$

Diese Abbildungen sind weitgehend willkürlich gewählt!

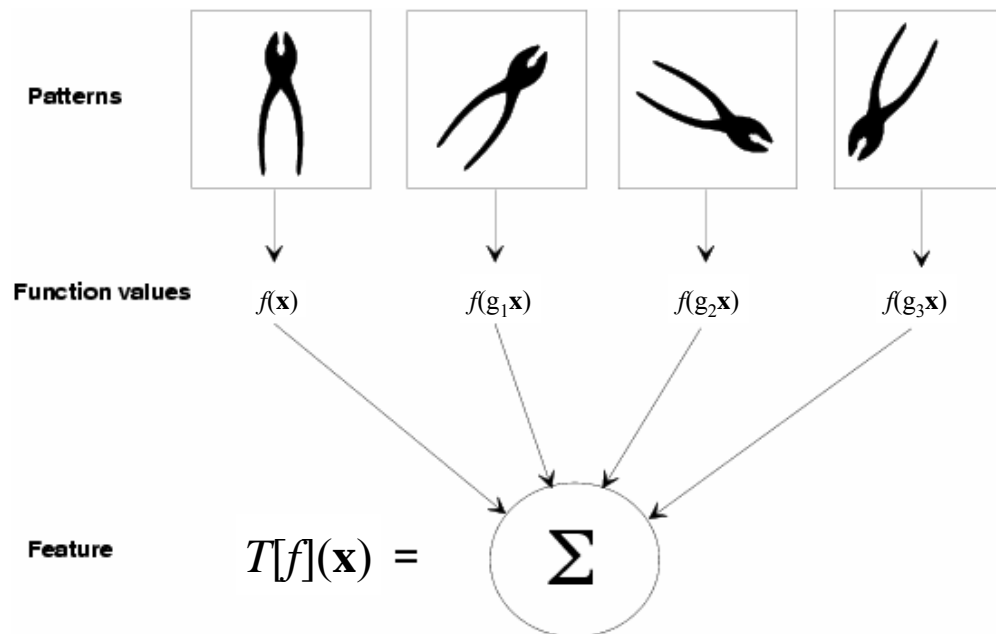


Ausserdem kann allgemein gezeigt werden, dass man bei der Gruppe der zyklischen Translationen der Länge  $N$  mit maximal  $(N+1)$  geeignet gewählten Merkmalen Vollständigkeit erzielen kann.

# Invarianten durch Gruppenmittelung über die *Euklidsche Bewegung*

Invarianten können unter Einsatz beliebiger Funktionen  $f$  durch Integration über die die Bewegungsgruppe gewonnen werden:

$$I[f](\mathbf{x}) = \int_G f(g\mathbf{x}) dg$$



# Integralinvarianten für die Gruppe der ebenen Bewegungen mit *lokalen* Funktionen

Für die zyklische ebene Bewegung gilt:

$$g(t_0, t_1, \varphi) \mathbf{x}[i, j] = \mathbf{x}[k, l]$$

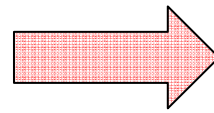
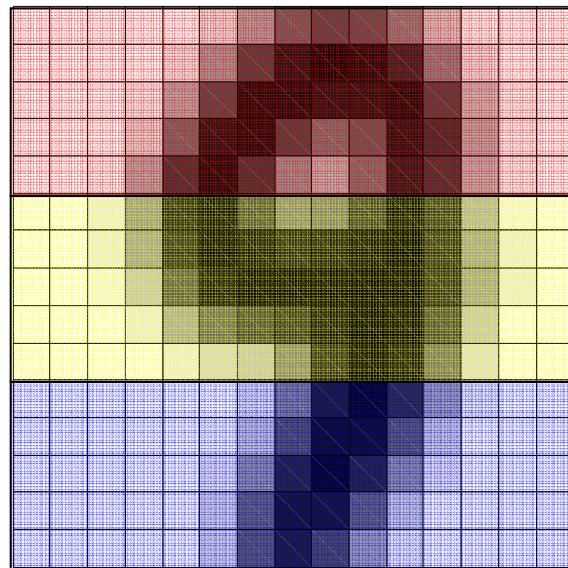
mit: 
$$\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \end{pmatrix}$$

Alle Indizes müssen Modulo der Bilddimension verstanden werden!

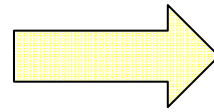
$$T[f](\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi NM} \int_{t_0=0}^N \int_{t_1=0}^M \int_{\varphi=0}^{2\pi} f(g\mathbf{x}) d\varphi dt_1 dt_0$$

# Wahl geeigneter Kernfunktionen?

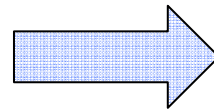
## Demo: lineare Merkmalkernfunktionen für rotierende handgeschriebene Ziffer



$$f_0 = \sum_{0 \leq i \leq N/3 - 1} \sum_{0 \leq j \leq N - 1} x_{i,j}$$



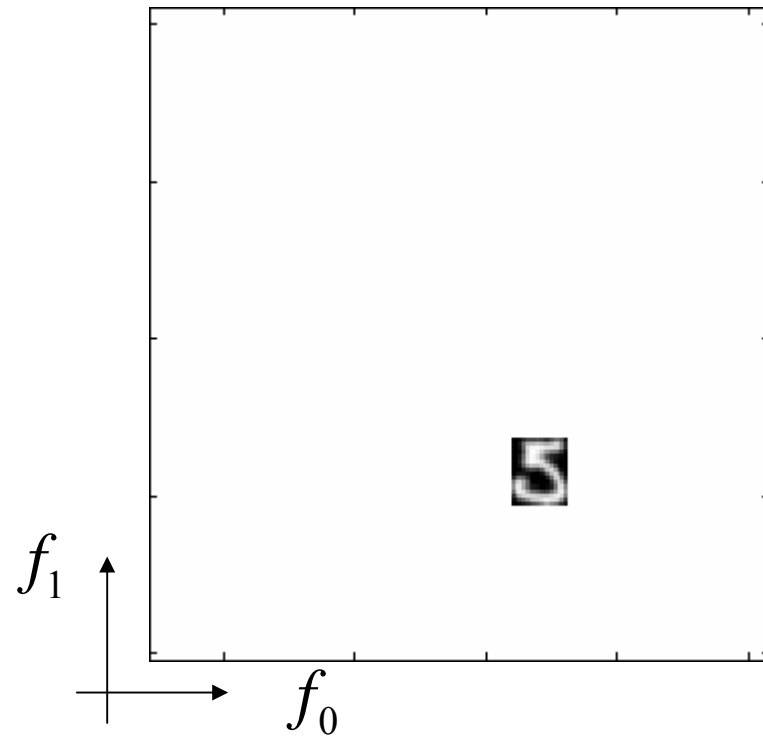
$$f_1 = \sum_{N/3 \leq i \leq 2N/3 - 1} \sum_{0 \leq j \leq N - 1} x_{i,j}$$



$$f_2 = \sum_{2N/3 \leq i \leq N - 1} \sum_{0 \leq j \leq N - 1} x_{i,j}$$

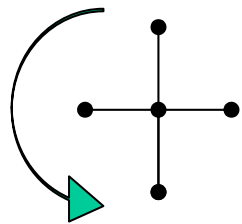
R. Herbrich (2004)

# Orbits von Merkmalen



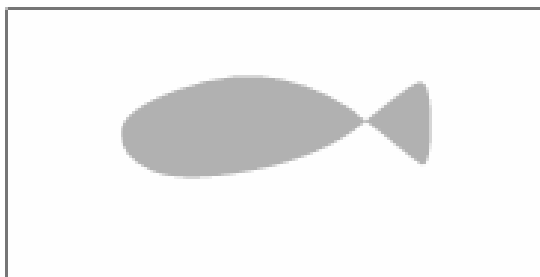
[orbit\orbit.html](#)

Es stellt sich nun heraus, dass  $f$  und  $g$  *vertauschbar* sind, d.h. man führt die die i.allg. lokale Funktion mit einer Euklidschen Bewegung über das ganze Bild. Näherung der Integration durch eine Summation auf dem Pixelraster und einer Rotation um eine endliche Anzahl von Winkeln, bei bilinearer Interpolation der Zwischenwerte.

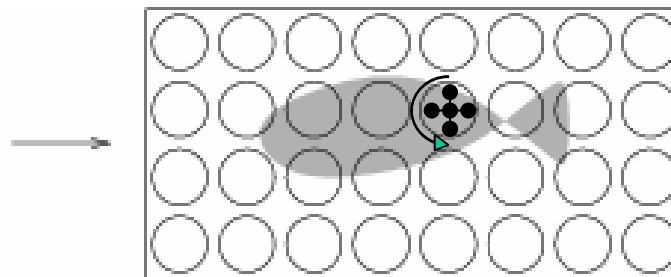


Berechnung  
des  
Monoms:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & x_{1,0}^3 & \\ \hline x_{0,-1}^1 & x_{0,0}^5 & x_{0,1}^2 \\ \hline & x_{-1,0}^2 & \\ \hline \end{array} = x_{0,-1}^1 \cdot x_{1,0}^3 \cdot x_{0,0}^5 \cdot x_{-1,0}^2 \cdot x_{0,1}^2$$



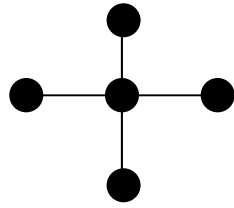
Image



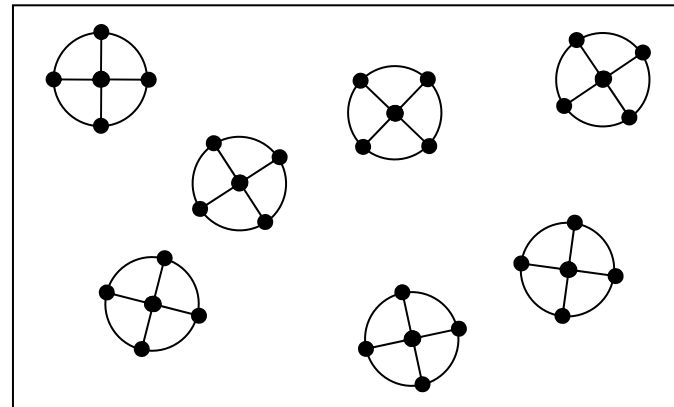
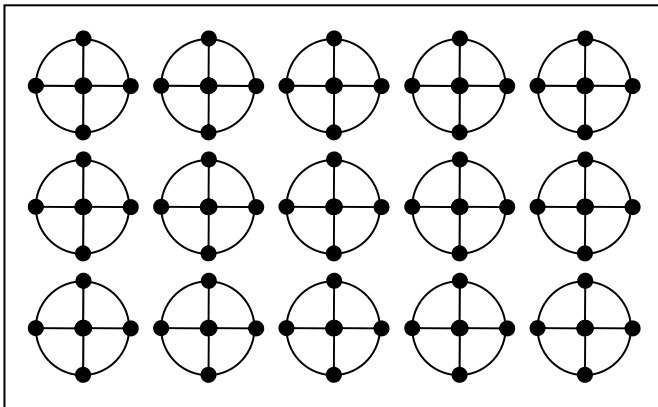
Evaluation of a local function  
for each pixel of the image

$$\frac{1}{|G|} \sum_{(i,j)}$$

Sum over all these  
local results



Monom

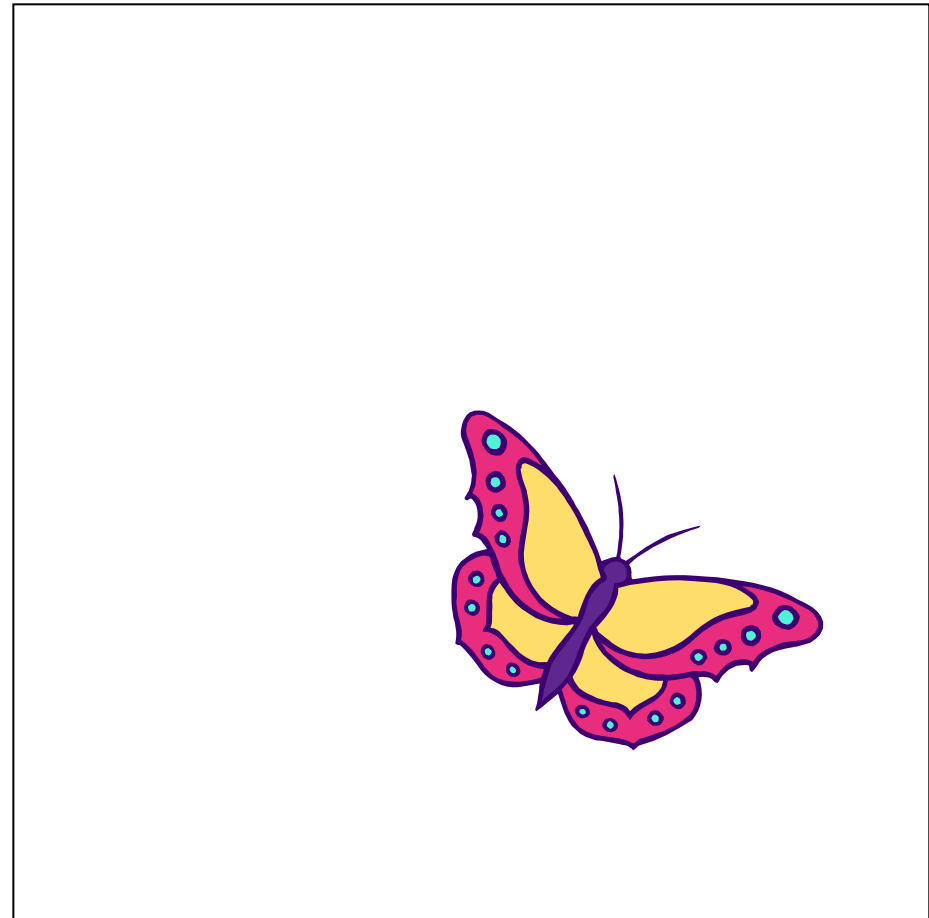
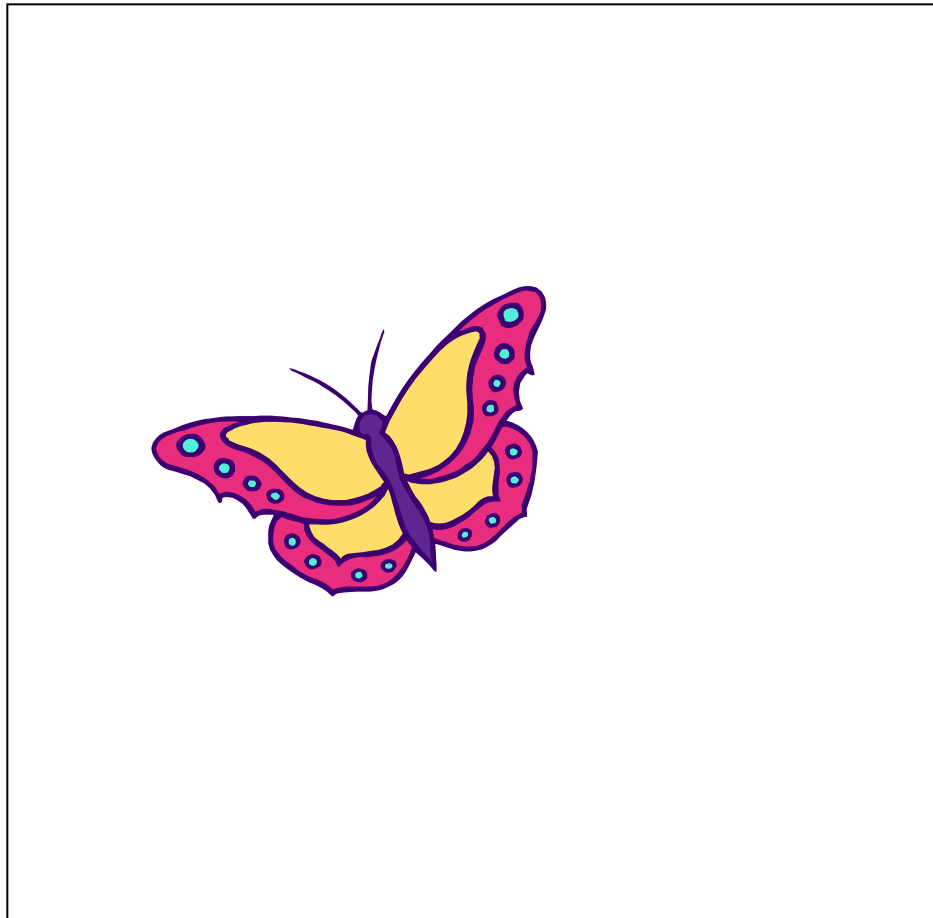


Deterministisches  
Integral über Euklidische  
ebene Bewegung

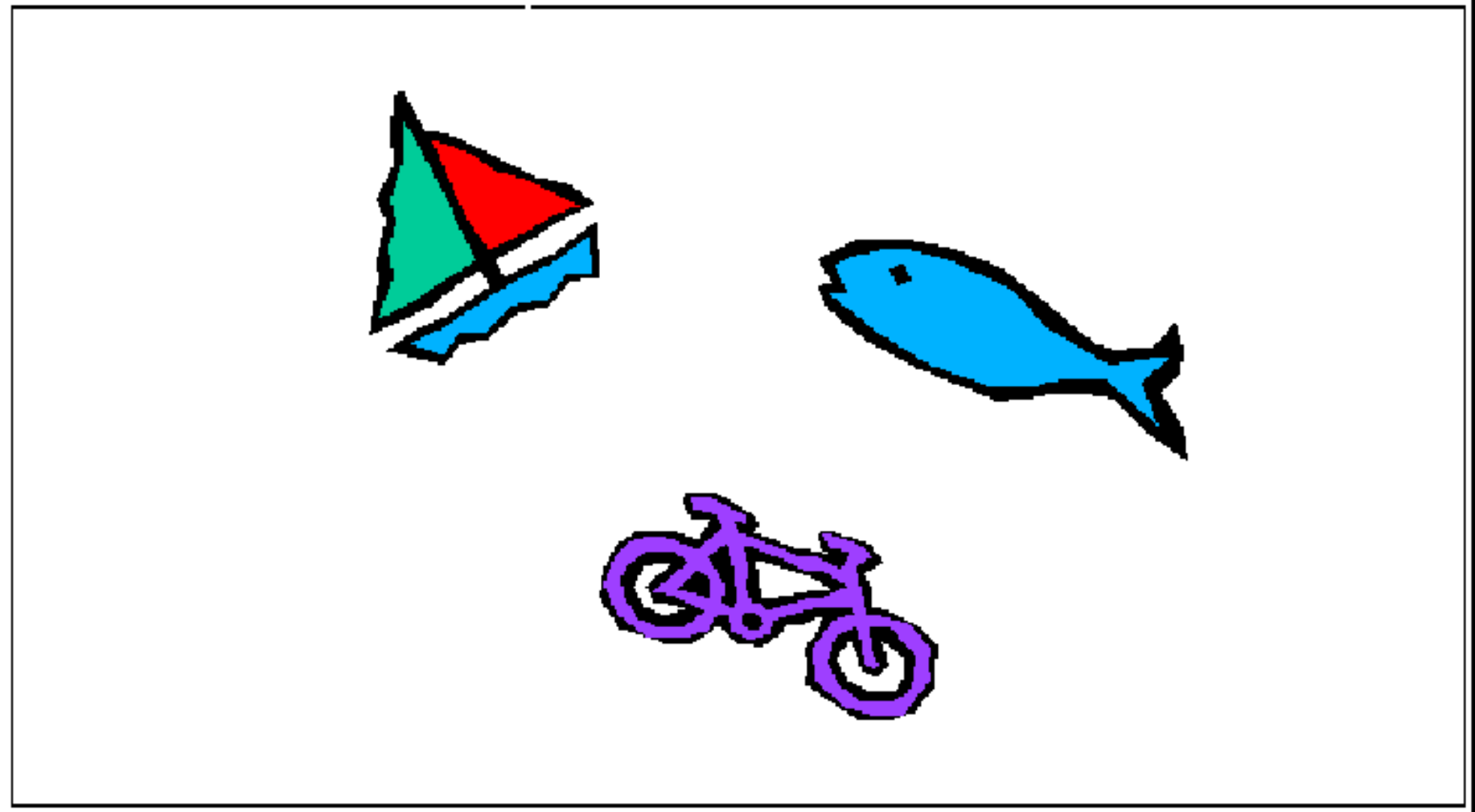
Monte-Carlo-Integration



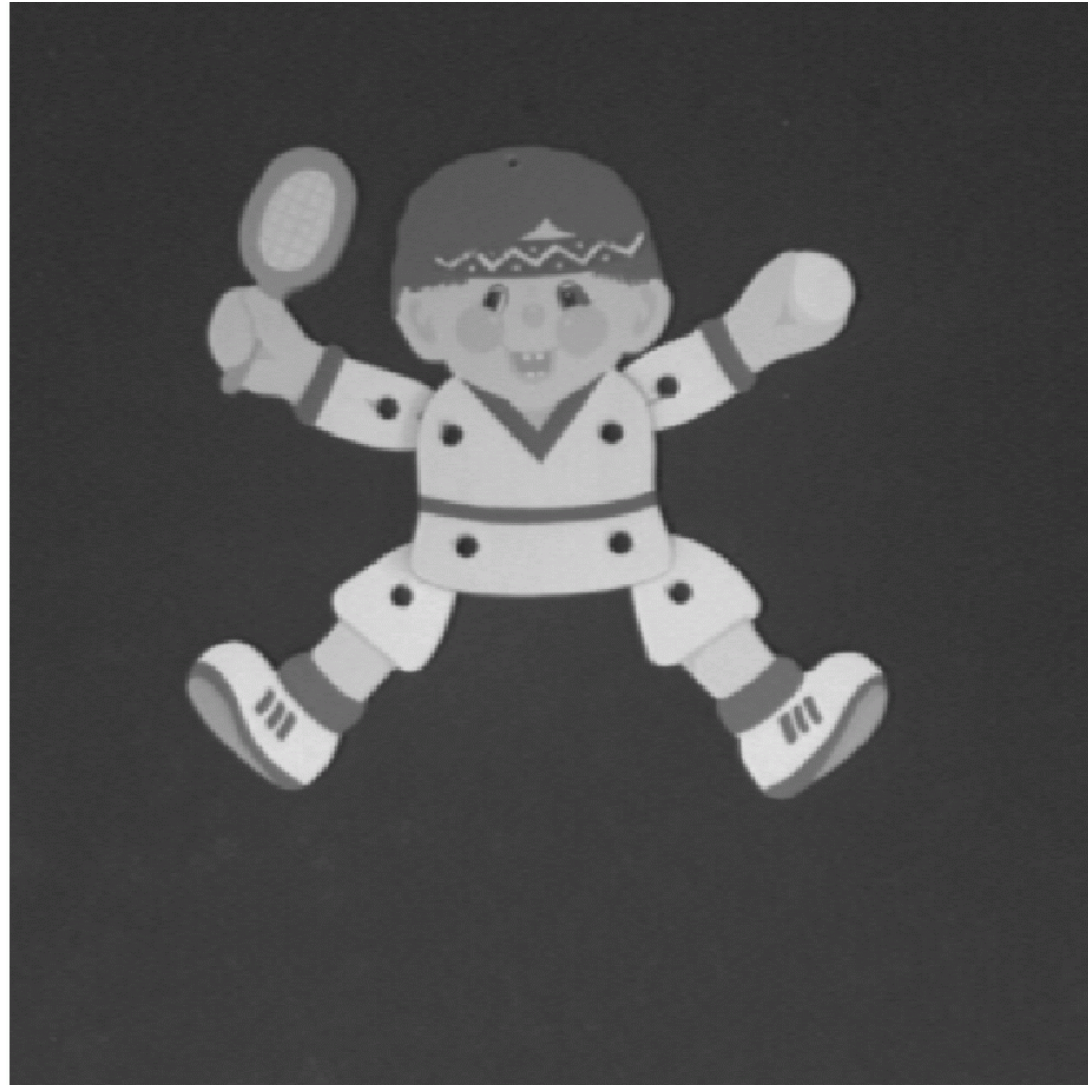
# Invarianz bezüglich einer globalen Euklidischen Bewegung (Translation and Rotation)



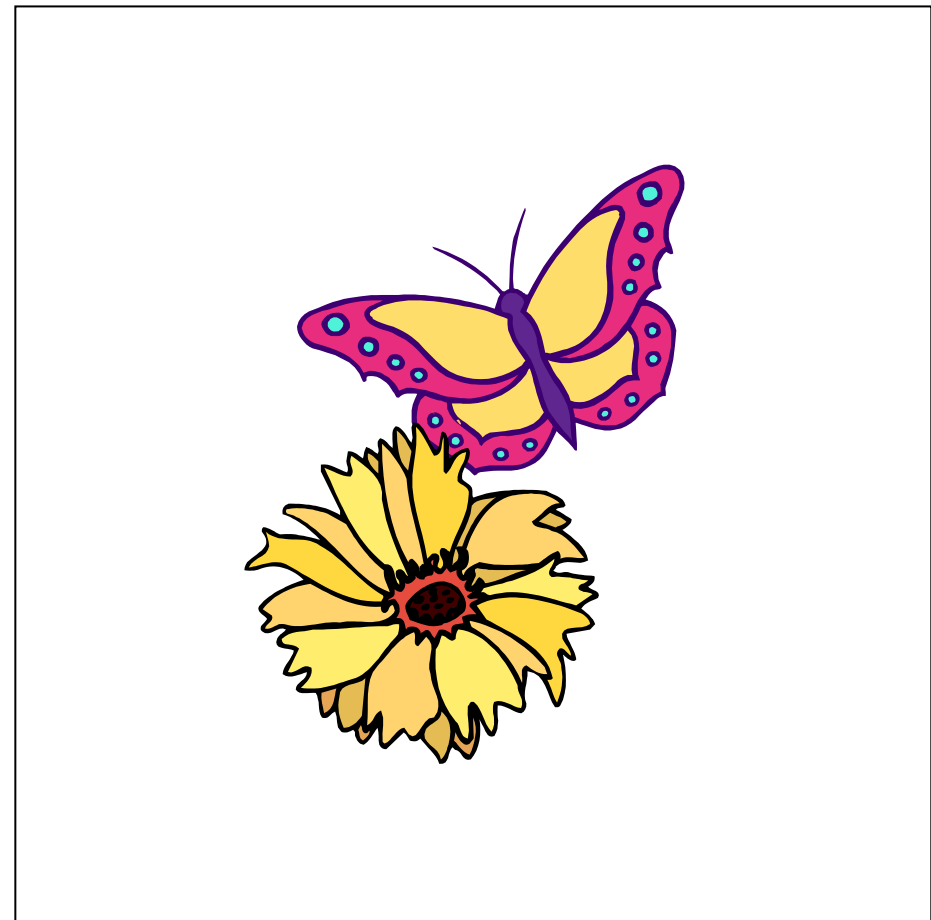
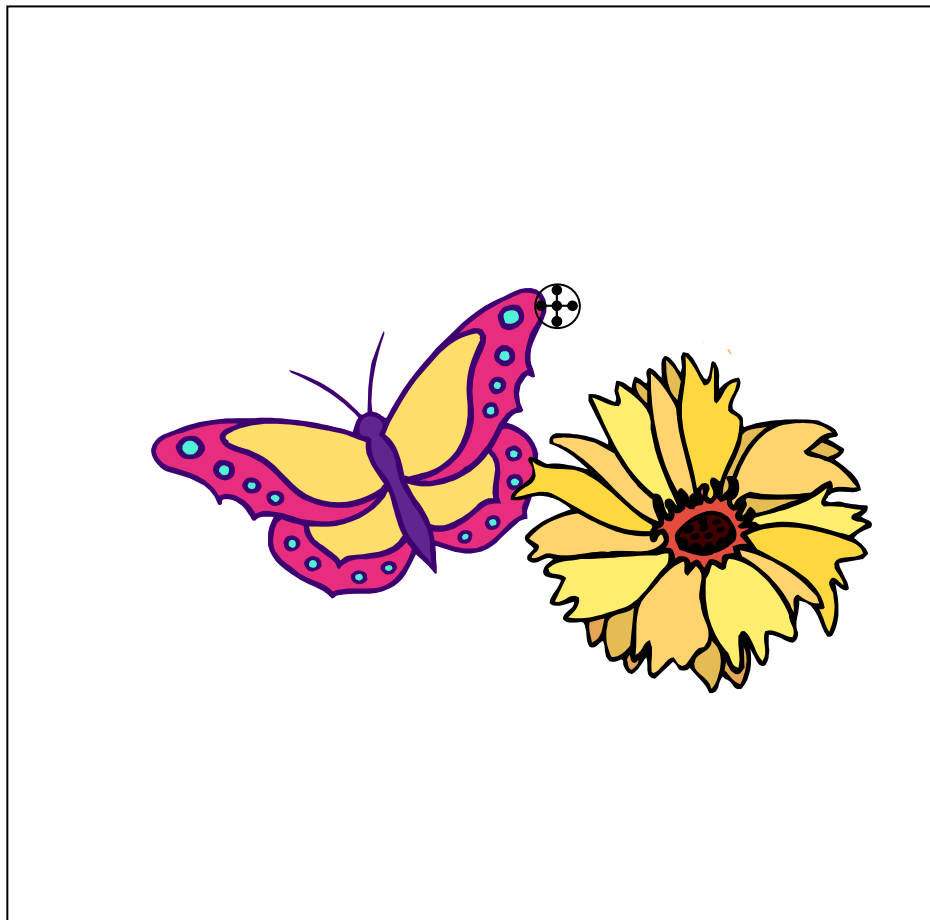
# Äquivalenzklasse für Objekte mit unabhängiger Euklidischer Bewegung (Benutzung von Funktionen mit lokalem Definitionsbereich)



# Erkennung von Objekten mit Gelenken



# Erkennung zweier Objekte in einer Szene ohne zu segmentieren



# Robustheit gegenüber topologischen Deformationen

