Die zweidimensionale translationsinvariante Transformation $\mathbb{C}T_{2D}$

Die zweidimensionale Translation läßt sich faktorisieren in zwei eindimensionale Translationen bzgl. aller Zeilen und Spalten.

$$\tau_{ij}(\mathbf{X}) = \tau_{s_i} \circ \tau_{z_j} \circ \mathbf{X} = \tau_{z_j} \circ \tau_{s_i} \circ \mathbf{X}$$

dabei bedeuten:

τ_{s_i} eine zyklische Permutation aller Spalten um i Plätze

τ_{z_j} eine zyklische Permutation aller Zeilen um j Plätze

Daraus folgt aber unmittelbar, daß man eine zweidimensionale Transformation der Klasse $\mathbb{C}T_{2D}$ dadurch erhält, dass man zuerst alle Spalten und danach alle Zeilen eindimensional transformiert $\mathbb{C}T_{zs}$, oder umgekehrt $\mathbb{C}T_{sz}$ (Indizes sind von rechts nach links zu lesen!):

$$\mathbb{C}T_{zs}(\tau_{ij}(\mathbf{X})) = \mathbb{C}T_{zs}(\mathbf{X}) \qquad \text{und ebenso:} \qquad \mathbb{C}T_{sz}(\tau_{ij}(\mathbf{X})) = \mathbb{C}T_{sz}(\mathbf{X})$$

Beweis:

$$\mathbb{C}T_{zs}(\tau_{ij}(\mathbf{X})) = \mathbb{C}T_z \circ \underbrace{\mathbb{C}T_s \circ \tau_{s_i}}_{=\mathbb{C}T_s \text{ (1D-Inv.)}} \circ \tau_{z_j} \circ \mathbf{X} = \mathbb{C}T_z \circ \underbrace{\mathbb{C}T_s \circ \tau_{z_j}}_{\text{vertauschbar}} \circ \mathbf{X}$$

$$= \underbrace{\mathbb{C}T_z \circ \tau_{z_j}}_{\mathbb{C}T_z} \circ \mathbb{C}T_s \circ \mathbf{X} = \mathbb{C}T_z \circ \mathbb{C}T_s \circ \mathbf{X} = \mathbb{C}T_{zs}(\mathbf{X}) \qquad \clubsuit$$

Entsprechend kann der Beweis für $\mathbb{C}T_{sz}$ geführt werden. Zu beachten ist jedoch insbesondere i.allg. die Eigenschaft:

$$\mathbb{C}T_{zs}(\mathbf{X}) \neq \mathbb{C}T_{sz}(\mathbf{X})$$

Zwei gegeneinander verschobene Grauwertmuster

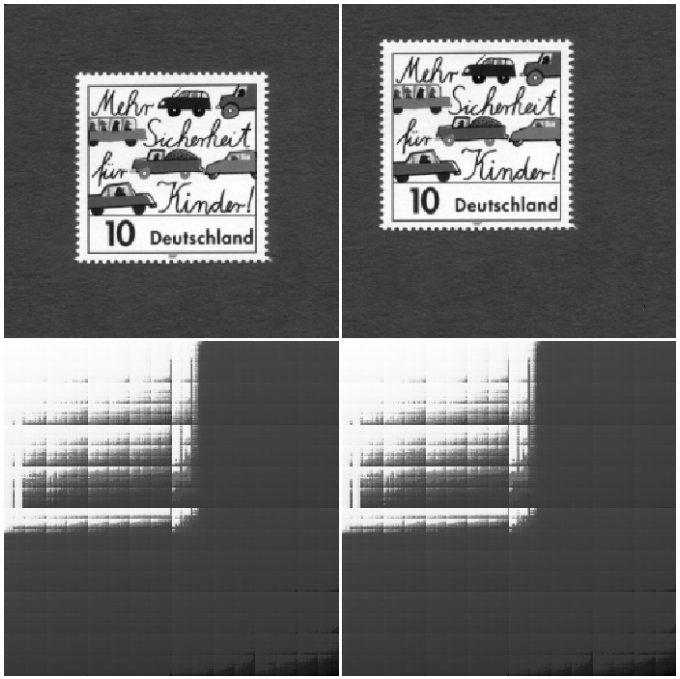
$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \tau_{2,2}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Invariante R-Transformierte

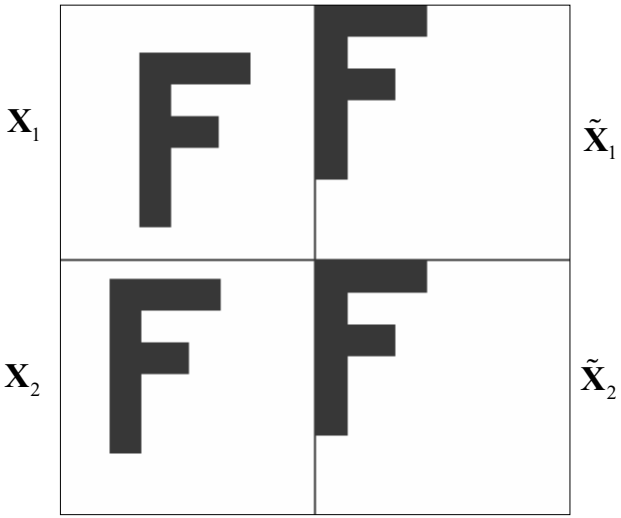
$$\tilde{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 17 & 5 & 7 & 7 & 15 & 3 & 9 & 9 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 & 1 & 7 & 5 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 15 & 3 & 5 & 5 & 13 & 1 & 7 & 7 \\ 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 11 & 1 & 1 & 1 & 9 & 3 & 3 & 3 \\ 7 & 3 & 1 & 1 & 5 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad \widetilde{(\tau_{2,2}(\mathbf{X}))} = \begin{bmatrix} 17 & 5 & 7 & 7 & 15 & 3 & 9 & 9 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 & 1 & 7 & 5 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 15 & 3 & 5 & 5 & 13 & 1 & 7 & 7 \\ 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 11 & 1 & 1 & 1 & 9 & 3 & 3 & 3 \\ 7 & 3 & 1 & 1 & 5 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Invariante B-Transformierte

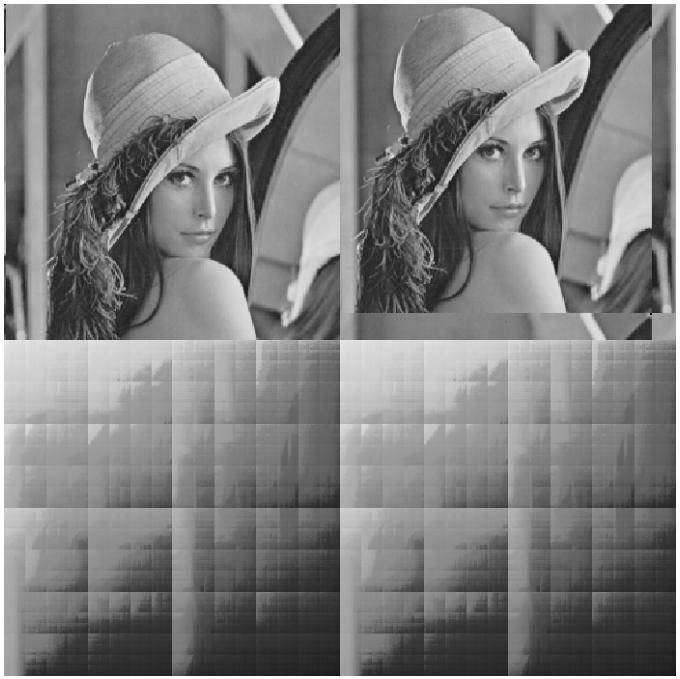
$$\tilde{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \widetilde{(\tau_{2,2}(\mathbf{X}))} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$



MT_{zs} bei homogenem Hintergrund

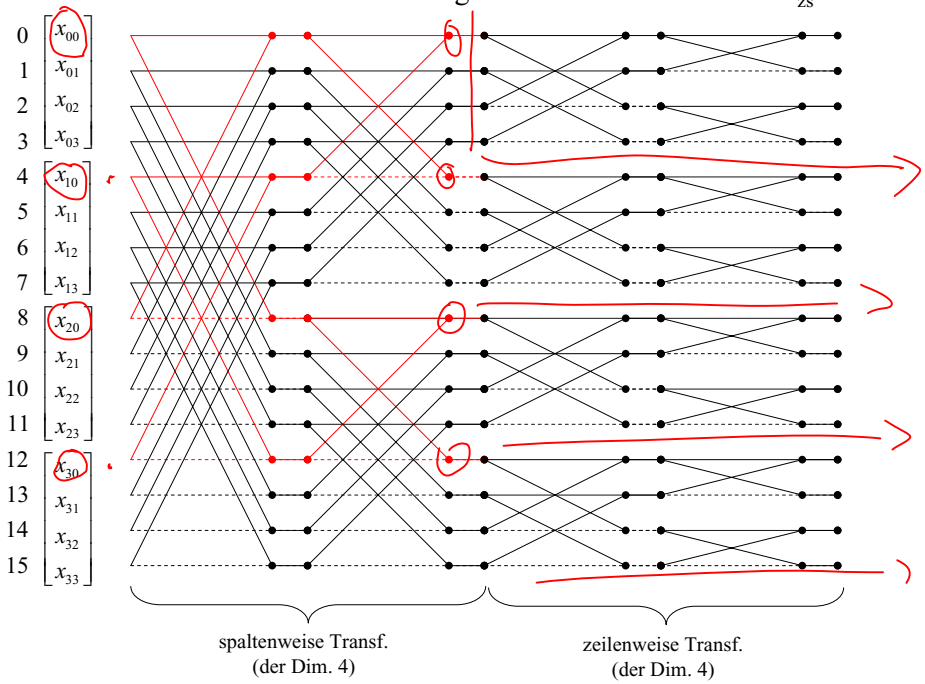


BT_{zs} bei homogenem Hintergrund

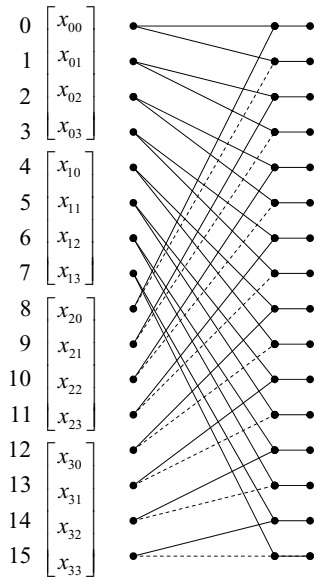


MT_{zs} bei inhomogenem Hintergrund

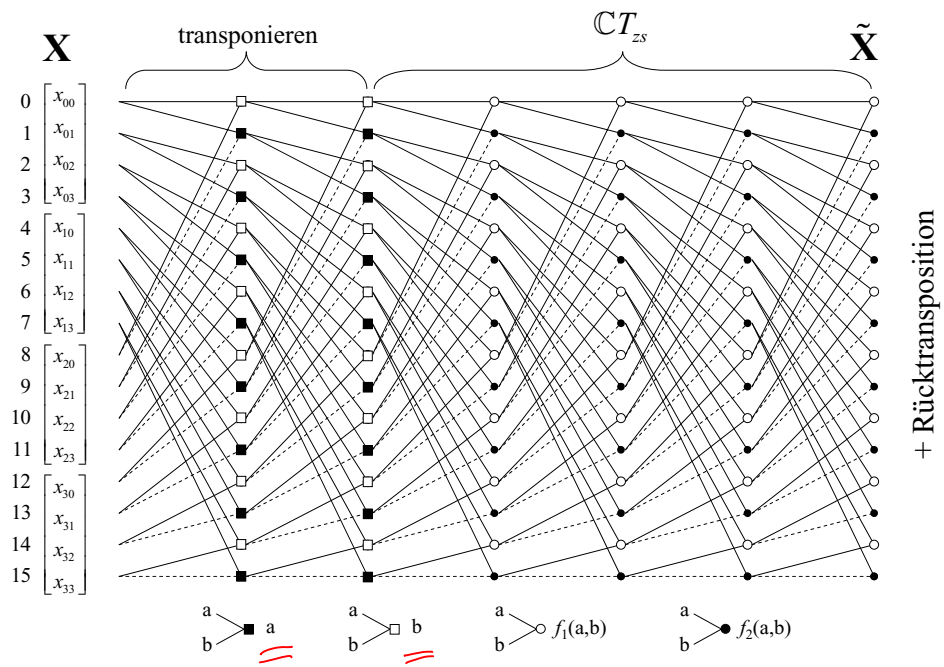
Eindimensionale Realisierung der zweidimensionalen $\mathbb{C}T_{zs}$



Homogene Struktur zur eindimensionalen Realisierung der zweidimensionalen $\mathbb{C}T_{zs}$



Homogene Struktur zur eindimensionalen Realisierung der zweidimensionalen $\mathbb{C}T_{sz}$



Eine allgemeinere Klasse zweidimensionaler translationsinvarianter Transformation $\mathbb{C}T_{2D}$

Es gilt offensichtlich:

$$\mathbb{C}T_{sz} = \omega_T^{-1} \circ \mathbb{C}T_{zs} \circ \omega_T \circ \mathbf{X}$$

Da auch das transponierte Ergebnis invariant ist, kann man sich die letzte Transposition ersparen:

$$\mathbb{C}T'_{sz} = \mathbb{C}T_{zs} \circ \omega_T \circ \mathbf{X}$$

Zu dieser Klasse gehört die Diagonaltransformation $\mathbb{C}T_{DI}$

Sie ist definiert als:

$$\mathbb{C}T_{DI} = \mathbb{C}T_{zs}(\omega_{DI}(\mathbf{X}))$$

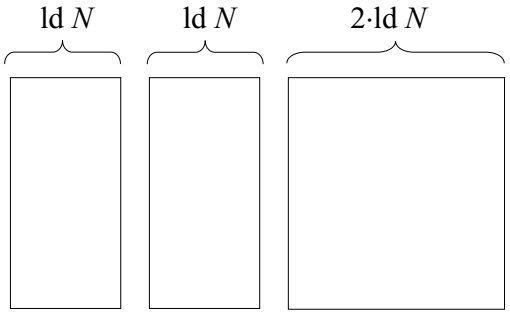
mit: $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0^T \\ \mathbf{x}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{N-1}^T \end{bmatrix}$ und $\dim(\mathbf{X}) = N \times N$

und der Definition der Diagonalpermutation:

$$\omega_{DI}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \tau_0(\mathbf{x}_0^T) \\ \tau_1(\mathbf{x}_1^T) \\ \vdots \\ \tau_{N-1}(\mathbf{x}_{N-1}^T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{0,0} & x_{0,1} & x_{0,2} & \cdots & x_{0,N-1} \\ x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & \cdots & x_{1,0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{N-1,N-1} & x_{N-1,0} & x_{N-1,1} & \cdots & x_{N-1,N-2} \end{bmatrix}$$

Die k-te Zeile wird k-mal zyklisch permutiert

Realisierung der $\mathbb{C}T_{DI}$ auf Parallelrechner mit homogenem Verbindungsnetzwerk



Benötigt werden insgesamt 4·ld N Durchläufe

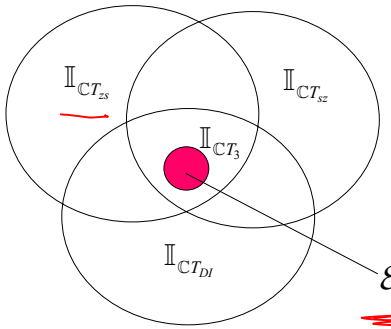
Zweidimensionale translationsinvariante Transformationsklasse mit einer Menge *allgemeinerer verträglicher Permutationen* $\Omega := \{\omega_i\}$

$$\mathbb{C}T_{zs}(\omega_k(\tau_{ij}(\mathbf{X})) = \mathbb{C}T_{zs}(\omega_k(\mathbf{X})) \quad \text{für} \quad \forall \omega_k \in \Omega$$

(ohne Beweis!)

Erhöhung des Grades an Vollständigkeit durch die Kombination verschiedener invarianter Transformationen

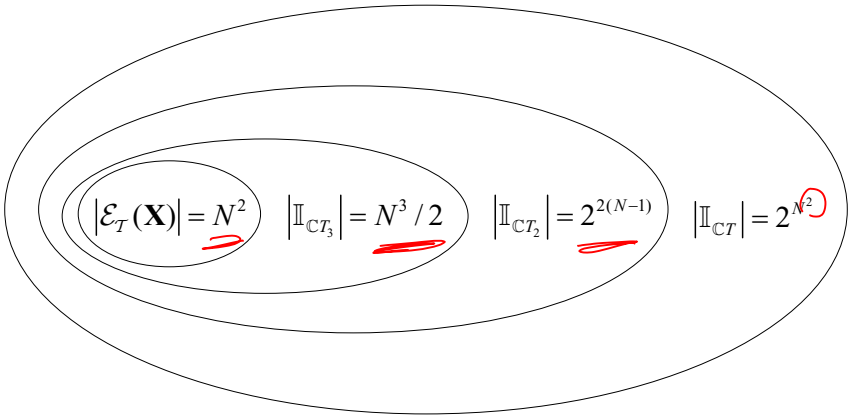
Vereinigt man zwei oder mehr Transformationen, so folgt aus der Tatsache, dass deren Invariantenmengen i.allg. voneinander verschieden sind, dass sich die Invariantenmengen der neuen Transformation aus der Schnittmenge der ursprünglichen Transformationen ergeben:



$$\mathbb{C}T_3 := \underbrace{\mathbb{C}T_{zs} \cup \mathbb{C}T_{sz}}_{\mathbb{C}T_2} \cup \mathbb{C}T_{DI}$$

$$\Rightarrow \mathbb{I}_{\mathbb{C}T_3} := \mathbb{I}_{\mathbb{C}T_{zs}} \cap \mathbb{I}_{\mathbb{C}T_{sz}} \cap \mathbb{I}_{\mathbb{C}T_{DI}}$$

Grad an Vollständigkeit für die verschiedenen Klassen von Transformationen



Störempfindlichkeit der RT

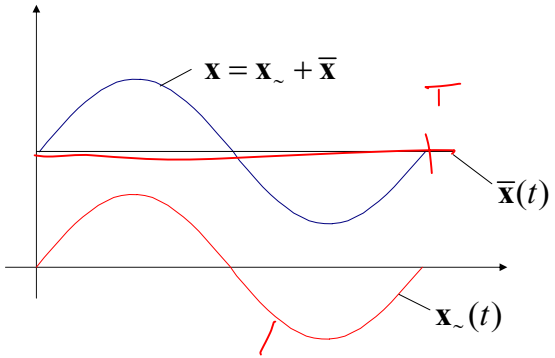
Reaktion auf systematische Störungen: Helligkeits- und Kontrastveränderungen:

$$\mathbf{x}' = k\mathbf{x} + a\mathbf{u} \quad \text{mit:} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Zusätzlich stochastische Störungen:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{n}$$

Zerlegung eines Signals in einen Wechsel- und einen Gleichanteil



$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_\sim + \overline{\mathbf{x}} = \underbrace{\mathbf{x}_\sim}_{\substack{\text{mittelwertfreier} \\ \text{Anteil}}} + \underbrace{\overline{x}\mathbf{u}}_{\text{Gleichanteil}} \quad \text{mit:} \quad \overline{x} = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} x(t)dt \quad \text{bzw:} \quad \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Satz: Ein zusätzlicher Gleichanteil beeinflusst nur den 0-ten Koeffizienten der RT; Invarianz erhält man einfach durch ignorieren des 0-ten Koeffizienten

$$\widetilde{(\mathbf{x} + a\mathbf{u})} = \tilde{\mathbf{x}} + a \cdot N \cdot \mathbf{e}_1 = \tilde{\mathbf{x}} + a \cdot N \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad a \in \mathbb{R}$$

$\mathbf{u} \triangleq$ Gleichanteil, $\mathbf{e}_1 \triangleq 1.$ Einheitsvektor

Satz: Die RT ist streng homogen bzgl. *mittelwertfreier* Muster $\mathbf{x}_\sim$:

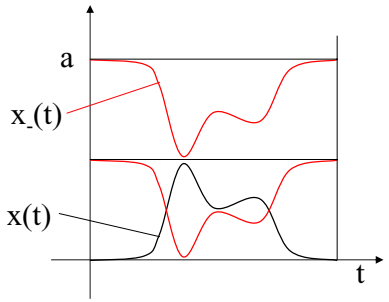
$$\widetilde{k\mathbf{x}_\sim} = |k|\,\widetilde{\mathbf{x}_\sim}$$

Beweis: vollständige Induktion

Kontrastumkehr bei der RT („Negativ“)

Die RT ist invariant bzgl. einer Kontrastumkehr, wenn man den 0-ten Koeffizienten unterdrückt (nur verantwortlich für den Gleichanteil):

$$\mathbf{x}_{_} = a\mathbf{u} - \mathbf{x} = a\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix} - \mathbf{x}$$



$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{_} &= a\mathbf{u} - \mathbf{x} = a\mathbf{u} - (\mathbf{x}_{\sim} + \bar{x}\mathbf{u})\\ &= (-\mathbf{x}_{\sim}) + (a - \bar{x})\mathbf{u}\\ \Rightarrow \widetilde{\mathbf{x}_{_}} &= \widetilde{\mathbf{x}_{\sim}} + N(a-\bar{x})\mathbf{e}_1\end{aligned}$$

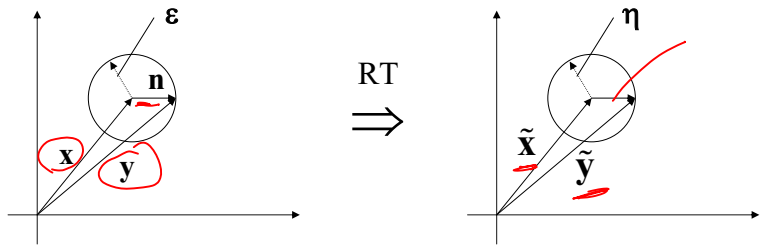
wegen:

$$\widetilde{(-\mathbf{x}_{\sim})} = \widetilde{\mathbf{x}_{\sim}} \quad \text{und} \quad \widetilde{c\mathbf{u}} = Nc\mathbf{e}_1$$

Unter der Annahme, dass nur positive Intensitäten zugelassen sind, gilt: $a \geq \max(x_i)$

Reaktion der RT auf stochastische Störungen

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{n}$$



Die Abbildung ist stetig bzgl. der Euklidschen Metrik!

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = \|\mathbf{n}\| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \|\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{x}}\| < \eta$$

präziser: $\|\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{x}}\| \leq \sqrt{N}\,\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ wobei: $\dim(\mathbf{x}) = \dim(\mathbf{y}) = N$

d.h. $\boxed{\eta = \sqrt{N}\varepsilon}$

Beweis: vollst. Ind.

Zwei Abbildungsbeispiele für die RT

a) Ergebnis liegt auf dem Rand der Abschätzung:

$\mathbf{x}^T = [1\ \ 3\ \ 5\ \ 6\ \ 8\ \ 7\ \ 4\ \ 2]$ $\mathbf{n}^T = [0{,}385\ \ 0{,}196\ \ 0{,}22\ \ -0{,}595\ \ -0{,}307\ \ -0{,}296\ \ 0{,}462\ \ 0{,}121]$

$\tilde{\mathbf{x}}^T = [36\ \ 0\ \ 2\ \ 2\ \ 16\ \ 0\ \ 6\ \ 6]$ $\tilde{\mathbf{y}}^T = \widetilde{(\mathbf{x}+\mathbf{n})}^T = [36{,}2\ \ 1{,}33\ \ 2{,}98\ \ 1{,}77\ \ 13{,}9\ \ 0{,}274\ \ 5{,}77\ \ 5{,}33]$

$$\|\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{x}}\| = 2{,}83\underbrace{\|\mathbf{n}\|}_{=1} = \sqrt{N} = \sqrt{8}$$

b) Ergebnis liegt im Innern der Abschätzung:

$\mathbf{x}^T = [8\ \ 3\ \ 5\ \ 1]$ $\mathbf{n}^T = [-4{,}5\ \ 4{,}5\ \ -4{,}5\ \ 4{,}5]$

$\tilde{\mathbf{x}}^T = \tilde{\mathbf{y}}^T = [17\ \ 9\ \ 5\ \ 1]$

$$\|\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{x}}\| = 0 \leq 2\underbrace{\|\mathbf{n}\|}_{=9} = 18$$

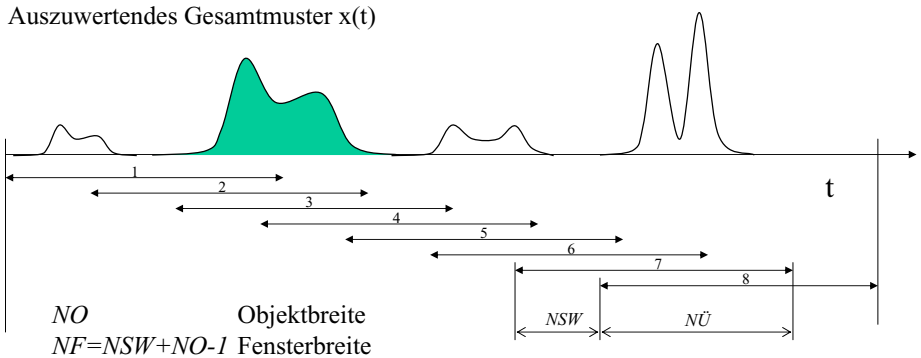
Dynamikumfang der Klasse $\mathbb{C}T$

- Die B- und die M-Transformation sind abgeschlossen, d.h. alle Zwischen- und das Endergebnis liegen im Zahlenbereich der Ausgangsdaten des A/D-Wandlers
- Bei der RT ergibt sich folgender Dynamikumfang (Anzahl der Binärstellen) der Transformierten:

$$\underbrace{m}_{A/D\text{–}Wandler} + n = m + \log_2 N$$

d.h. in jeder Schicht der RT kommt höchstens eine Stelle hinzu (Verdopplung des Wertes)

Suchfeldstrategie mit sich überlappenden Fenstern bei eindimensionalen Signalen als Alternative zur vollständigen Korrelation

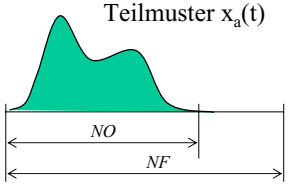


NO Objektbreite
NF=NSW+NO-1 Fensterbreite
NSW=NF-NÜ Schrittweite
NÜ=NO-1 Überschneidungsbereich

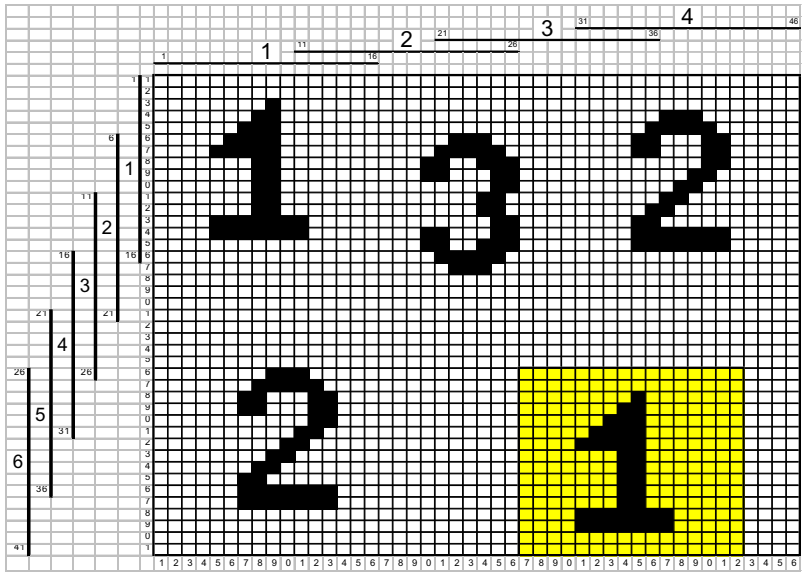
Garantie, dass Objekt vollständig in einem der Teilfenster enthalten!!

Kompromiss zwischen Schrittweite und Signal/Rauschverhältnis (Vereinzelungsbedingung)

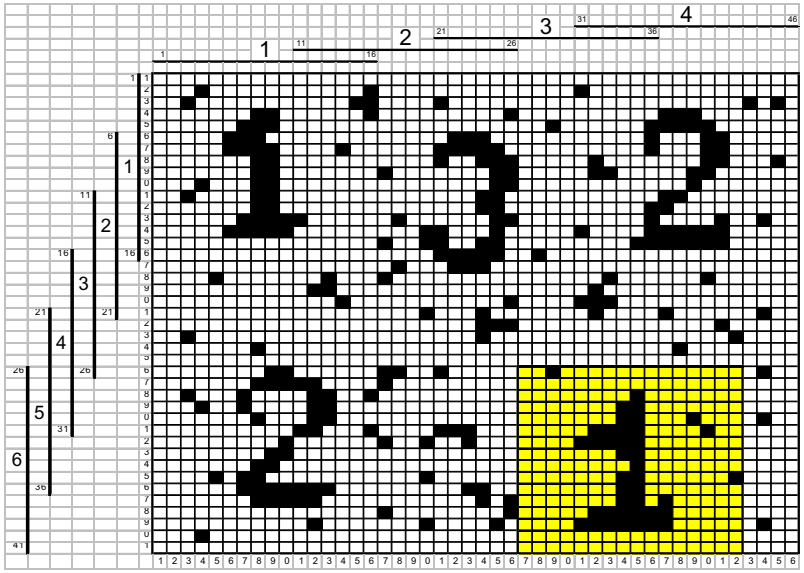
Zu detektierendes Teilmuster $x_a(t)$



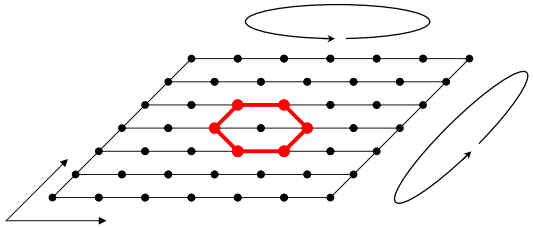
Suchfeldstrategie mit sich überlappenden Fenstern bei ungestörten Vorlagen

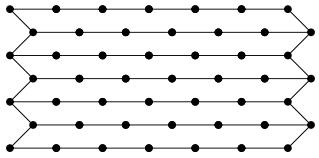


Suchfeldstrategie mit sich überlappenden Fenstern bei gestörten Vorlagen



Translationsinvarianz bei einer Hexagonalabtastung



Jede Translation in einem Hexagonalraster kann durch Überlagerung zweier schiefwinkliger Basisvektoren realisiert werden. Das Grundgebiet bildet eine Raute.

Durch eine Reorganisation der Daten kann auch näherungsweise ein Rechteckraster erzeugt werden.