Die Gruppe der affinen Abbildungen $\mathcal{A}$

Die Gruppe der affinen Abbildungen entsteht durch Wahl einer beliebigen regulären Matrix **A** (det(**A**) $\neq$ 0) und einer Translation **a**:

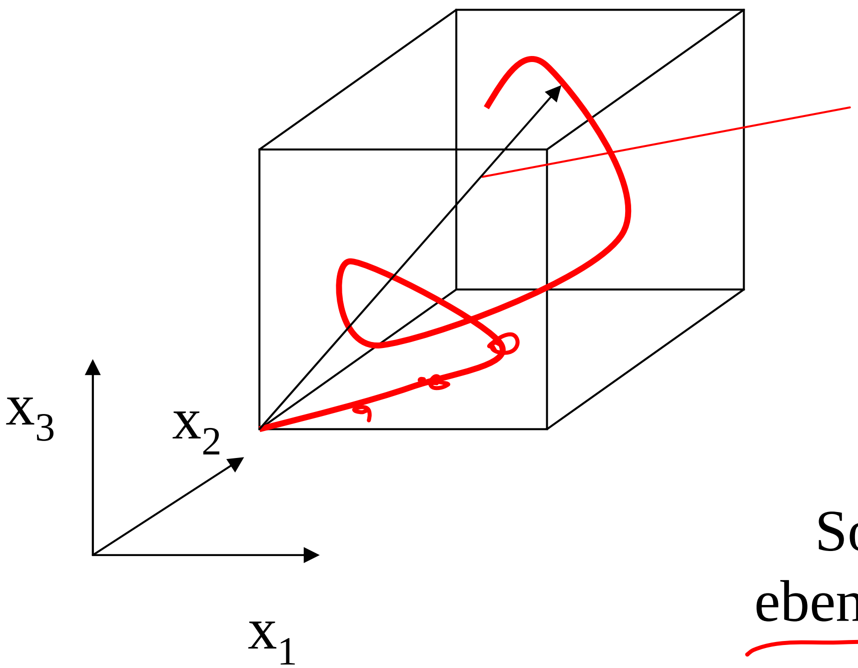
$$\boxed{\mathbf{t}' = \mathbf{A}\mathbf{t} + \mathbf{a}}$$

2×2 $\quad$ 2

Diese Abbildung hat 6 Freiheitsgrade (4 für die allgemeine Matrix **A**, sowie zwei für den Translationsvektor **a**.

Die affine Abbildung beschreibt die allgemeine räumliche Bewegung einer planaren Bildvorlage mit anschließender Parallelprojektion in die Kameraebene, was nachfolgend gezeigt werden soll.

Bewegung einer beliebigen Kurve im Raum mit anschließender Parallelprojektion in die Kameraebene



$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

Sonderfall der ebenen Raumkurve: $x_3(t) \equiv 0$

Die Bogenlänge berechnet sich zu:

$$s = \int_{t_0}^{t} \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| \, dt = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t) + \dot{x}_3^2(t)} \, dt$$

mit:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \\ dx_3/dt \end{bmatrix}$$

Euklidsche räumliche Bewegung (Rotation und Translation):

$A_3 A_2 A_1 \cdot \underline{x}$

$$\boxed{\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}}$$

Mit der orthogonalen Drehmatrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} = c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3 & A_{12} = -\, c_2 s_3 - c_1 s_2 c_3 & A_{13} = s_1 s_2 \\ A_{21} = s_2 c_3 + c_1 c_2 s_3 & A_{22} = -\, s_2 s_3 + c_1 c_2 c_3 & A_{23} = -\, s_1 c_2 \\ A_{31} = s_1 s_3 & A_{32} = s_1 c_3 & A_{33} = c_1 \end{bmatrix}$$

wobei:

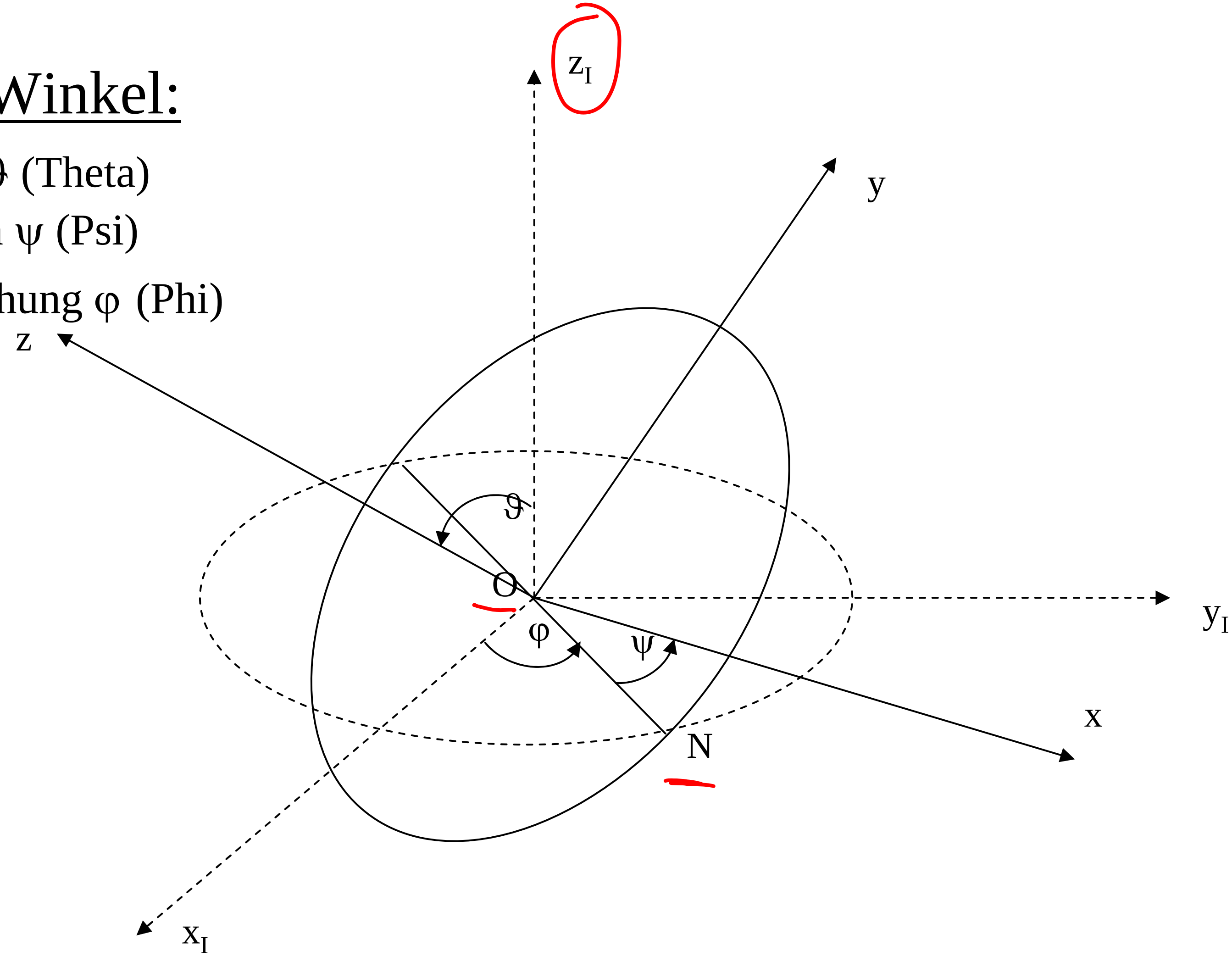
$$c_1 = \cos\vartheta, \quad c_2 = \cos\psi, \quad c_3 = \cos\varphi$$
$$s_1 = \sin\vartheta, \quad s_2 = \sin\psi, \quad s_3 = \sin\varphi$$

Und der Translation:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Eulersche Winkel:

1. Nutation ϑ (Theta)
2. Präzession ψ (Psi)
3. Reine Drehung φ (Phi)



Der Übergang vom Inertialsystem auf das körperfeste System wird mit den drei folgenden Drehungen realisiert:

1. Drehung φ um die z_I - Achse: die x-Achse geht in die sogenannte Knotenlinie O-N über.
2. Drehung ϑ um die Knotenlinie O-N: Die inertiale z_I - Achse geht in die körperfeste z-Achse über.
3. Drehung ψ um die z - Achse: Man erhält das körperfeste (x,y,z)-Koordinatensystem.

Faktorisierung der Drehmatrix:

$$\mathbf{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Drehung um z-Achse } (\psi)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & -s_1 \\ 0 & s_1 & c_1 \end{bmatrix}}_{\text{Drehung um x-Achse } (\vartheta)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Drehung um z-Achse } (\varphi)}$$

Eigenschaften der Drehmatrix **A**:

- Die Zeilen- und Spaltenvektoren von **A** sind orthogonal und normiert und daraus folgt
- Eine Drehmatrix **A** ist orthogonal, d.h. es gilt:

  $\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{T}$ und somit auch $\mathbf{A}^{T}\mathbf{A}=\mathbf{A}\mathbf{A}^{T}=\mathbf{I}$
- Weiterhin gilt: det(**A**)=1 (reine Drehung, ohne Spiegelung)
- Es gilt somit für die Drehmatrizen:

$$(\mathbf{ABC})^{-1}=(\mathbf{ABC})^{T}=\mathbf{C}^{T}\mathbf{B}^{T}\mathbf{A}^{T}$$

Und somit:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T = \underbrace{\begin{bmatrix} c_3 & s_3 & 0 \\ -s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & s_1 \\ 0 & -s_1 & c_1 \end{bmatrix}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Zurückdrehen durch Umkehrung der Reihenfolge!

Kompaktere Schreibweise:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_2 & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & \mathbf{R}_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{R}_3 & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und: $\mathbf{R}_i^{-1} = \mathbf{R}_i^T$

Nun: orthogonale Projektion der räumlichen Kurve $\mathbf{x}(t)$ in die $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)$-Ebene mit dem Projektionsoperator $\mathbf{P}_{12}$:

$$\mathbf{x}_{12} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{P}_{12}\mathbf{x} \qquad \text{mit:} \qquad \mathbf{P}_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Der Projektionsoperator $\mathbf{P}_{12}$ ist idempotent, d.h. es gilt:

$$\mathbf{P}_{12}^2 = \mathbf{P}_{12}$$

Somit ergibt aus der allgemeinen Bewegung im Raum mit anschliessender Projektion:

$$\boxed{\mathbf{x}'' = \mathbf{P}_{12}\mathbf{x}' = \mathbf{P}_{12}(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b})}$$

Betrachtet man die Wirkung der Projektion auf **A**:

$$\mathbf{P}_{12}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Da es sich um eine ebene Kurve handelt ($x_3 \equiv 0$) kann 3. Spalte entfallen:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Und somit ergibt sich eine Reduktion der Beschreibung auf die Dimension 2:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}'\mathbf{x}'^{0} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix}$$

mit:

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_2 & -s_2 \\ s_2 & c_2 \end{bmatrix}}_{\text{drehen } (\psi)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}}_{\text{stauchen entlang y}} \underbrace{\begin{bmatrix} c_3 & -s_3 \\ s_3 & c_3 \end{bmatrix}}_{\text{drehen } (\varphi)} = \mathbf{R}_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \mathbf{R}_3$$

3 Freiheitsgrade: c_1, c_2, c_3 bzw. ψ, c_1, φ

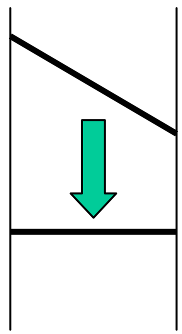
oder ausmultipliziert:

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} c_2c_3 - c_1s_2s_3 & -c_2s_3 - c_1s_2c_3 \\ s_2c_3 + c_1c_2s_3 & -s_2s_3 + c_1c_2c_3 \end{bmatrix}$$

Es ist somit gleichwertig eine ebene Kurve ($x_3 \equiv 0$) im dreidimensionalen Raum zu drehen und dann in die ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$)-Ebene zu projezieren oder aber mit einer entsprechenden zweidimensionalen affinen Abbildung zu beschreiben!

Diskussion der Freiheitsgrade:

- Wir sehen jedoch nur drei Freiheitsgrade c_1,c_2,c_3. Die allgemeine affine Abbildung hat hingegen 4!
- Bei der hier beschrieben Vorgehensweise werden die Objekte nur gestaucht und nicht vergrößert. Nimmt man nun eine allgemeine Streckung (vergrößern/verkleinern) als Vorfaktor k hinzu, kommt man wieder auf 4 Freiheitsgrade!



$$\underbrace{\begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{bmatrix}}_{\text{allgemeine Stauchung}} = \underbrace{\delta_1}_{\text{Streckung}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta_2/\delta_1 \end{bmatrix}}_{\text{stauchen entlang y}}$$

Invarianten geometrischer Abbildungen:

$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$

Kongruente Abbildungen ($\mathbf{AA}^T$=I) sind ***längentreu***:

$$\left\|\mathbf{x}'\right\|^2 = <\mathbf{x}',\mathbf{x}'> = <\mathbf{Ax},\mathbf{Ax}> = <\mathbf{x},\mathbf{A}^*\mathbf{Ax}> \overset{!}{=} <\mathbf{x},\mathbf{x}> = \left\|\mathbf{x}\right\|^2$$

gilt nur für: $\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^*$ (orthogonale Drehmatrix)

Die Gruppe der Ähnlichkeiten garantiert winkeltreue (konforme) Abbildungen:

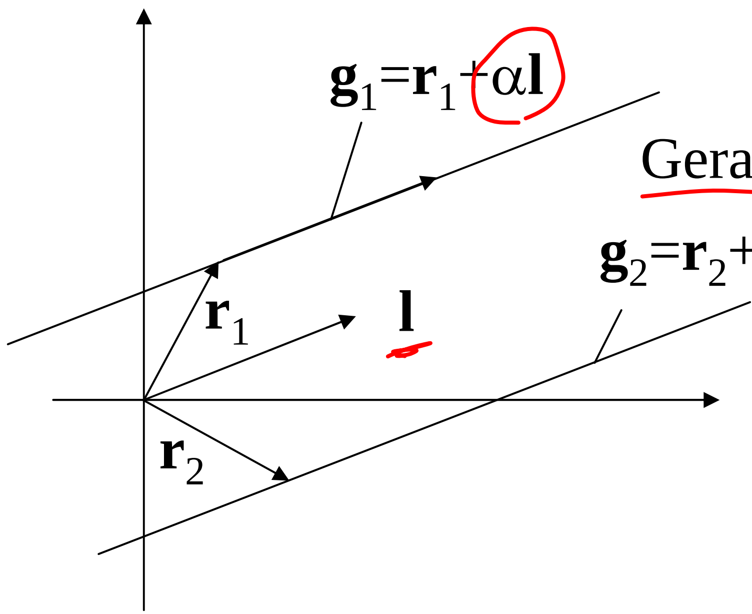
$$\cos\varphi = \frac{<\mathbf{x}',\mathbf{y}'>}{\|\mathbf{x}'\|\|\mathbf{y}'\|} = \frac{<\mathbf{Ax},\mathbf{Ay}>}{<\mathbf{Ax},\mathbf{Ax}>^{1/2}<\mathbf{Ay},\mathbf{Ay}>^{1/2}}$$

mit: $\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mu\mathbf{I}$ folgt:

$$\cos\varphi = \frac{<\mathbf{x},\mathbf{A}^*\mathbf{Ay}>}{<\mathbf{x},\mathbf{A}^*\mathbf{Ax}>^{1/2}<\mathbf{y},\mathbf{A}^*\mathbf{Ay}>^{1/2}} =$$

$$\frac{\cancel{\mu}<\mathbf{x},\mathbf{y}>}{\cancel{\mu^{1/2}}<\mathbf{x},\mathbf{x}>^{1/2}\cancel{\mu^{1/2}}<\mathbf{y},\mathbf{y}>^{1/2}} = \frac{<\mathbf{x},\mathbf{y}>}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}$$

Die Gruppe der affinen Abbildungen erhalten ***Parallelitäten***:



Geradengleichungen

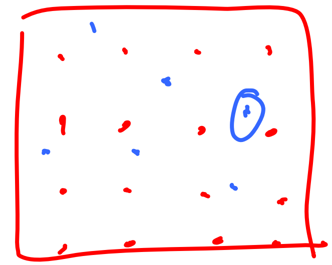
Für alle Punktepaare auf den zu **l** parallelen Geraden gilt: $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 = \alpha\mathbf{l}$

affin transformiert bedeutet das: $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{t}$ und somit:

$$\mathbf{x}_2' - \mathbf{x}_1' = \mathbf{A}\mathbf{x}_2 + \mathbf{t} - \mathbf{A}\mathbf{x}_1 - \mathbf{t} = \mathbf{A}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = \alpha\mathbf{A}\mathbf{l} = \alpha\mathbf{l}'$$

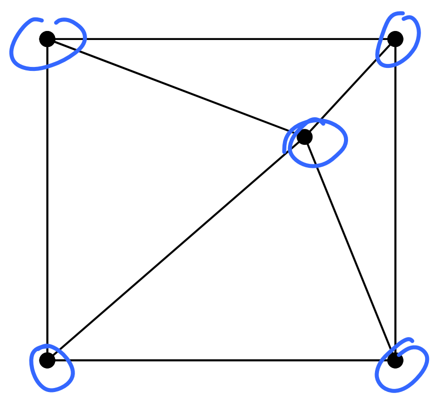
dies sind wiederum Punkte auf parallelen Geraden mit der Steigung **l´**

Interpolation



Bei der Rotation und bei der Translation um Bruchteile des Abtastintervalls ist eine Interpolation der Grauwerte von Bildern erforderlich (nichtgitterkonforme Abbildungen). Dies lässt sich am einfachsten durch

a) die Nächste-Nachbar-Regel realisieren:



Oder besser mit der bilinearen Interpolation:

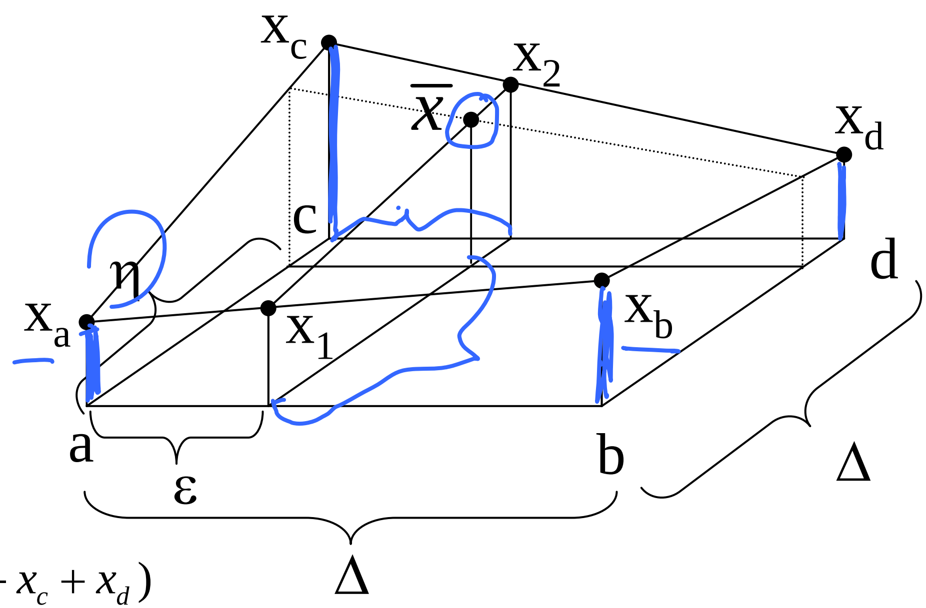
$$x_1 = x_a + \frac{\varepsilon}{\Delta}(x_b - x_a) = \bar{x}(x_a, x_b, \varepsilon)$$

$$x_2 = x_c + \frac{\varepsilon}{\Delta}(x_d - x_c) = \bar{x}(x_c, x_d, \varepsilon)$$

und damit:

$$\bar{x} = x_1 + \frac{\eta}{\Delta}(x_2 - x_1) = \bar{x}(x_1, x_2, \eta)$$

$$= x_a + \frac{\varepsilon}{\Delta}(x_b - x_a) + \frac{\eta}{\Delta}(x_c - x_a) + \frac{\varepsilon\eta}{\Delta^2}(x_a - x_b - x_c + x_d)$$



Man erhält das gleiche Ergebnis, wenn man x_a gegen x_c sowie ε gegen η vertauscht, d.h. man könnte auch zuerst bzgl. (x_a, x_a, η) und (x_b, x_d, η) interpolieren und dann linear über das Ergebnis davon.