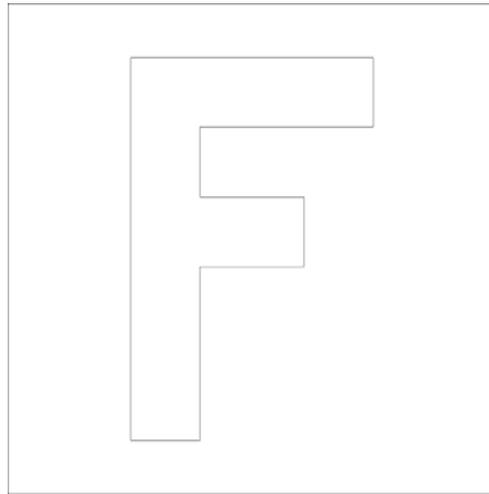
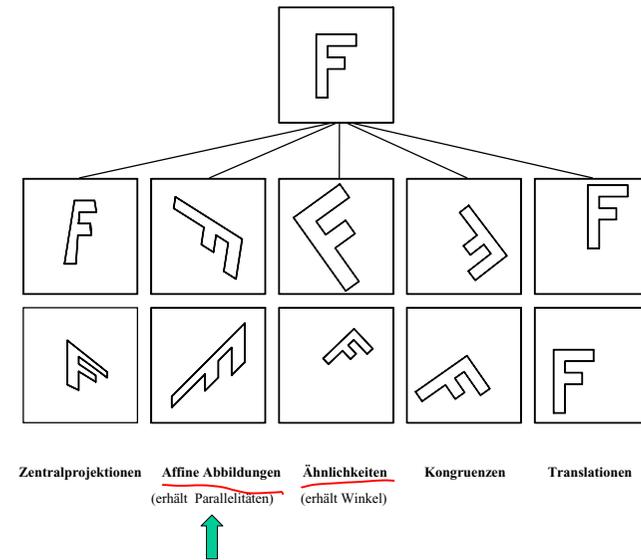


# Affininvariante Fourierdeskriptoren

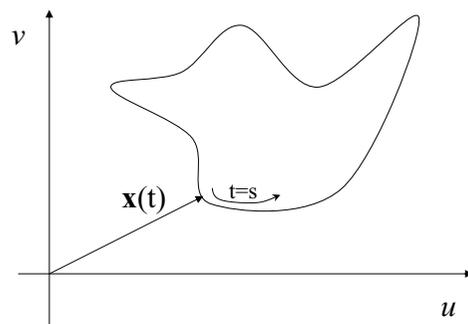
Gesucht: eine Verallgemeinerung der zuvor eingeführten ähnlichkeitsinvarianten Fourierdeskriptoren



# Geometrische Transformationen



# Reelle, vektorielle, parametrische Beschreibung einer geschlossenen Kontur



$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$$

Mögliche Parametrisierung:  
 $t=s$  (Bogenlänge)

# Affine Abbildung einer Kontur

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}^0(t(t^0)) + \mathbf{b}$$

mit:  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$   $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$   $\det(\mathbf{A}) \neq 0$

Zusätzlich Aufpunktverschiebung:

$$t(t^0, \tau)$$

Falls Bogenlänge als Paramterisierung

verwendet wird:  $t(t^0, \tau) = t(t^0 + \tau)$

Damit ergeben sich insgesamt 7 Freiheitsgrade für die affine Abbildung!

# Äquivalente Strukturen

- In der Äquivalenzklasse *ähnlicher* Abbildungen mit der Äquivalenzrelation  $\sim$  gilt:

Kreis1  $\sim$  Kreis2  
 Kreis  $\approx$  Ellipse  
 Parallelogramm  $\approx$  Rechteck  $\approx$  Quadrat

- In der Äquivalenzklasse *affiner* Abbildungen hingegen gilt:

Kreis  $\sim$  Ellipse   
 Parallelogramm  $\sim$  Rechteck  $\sim$  Quadrat

aber: Kreis  $\approx$  Quadrat

# Entwicklung der Kontur als periodische Funktion in eine Fourierreihe

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \mathbf{x}_k e^{j2\pi kt/T}$$

mit dem komplexwertigen Fourierkoeffizientenvektor:

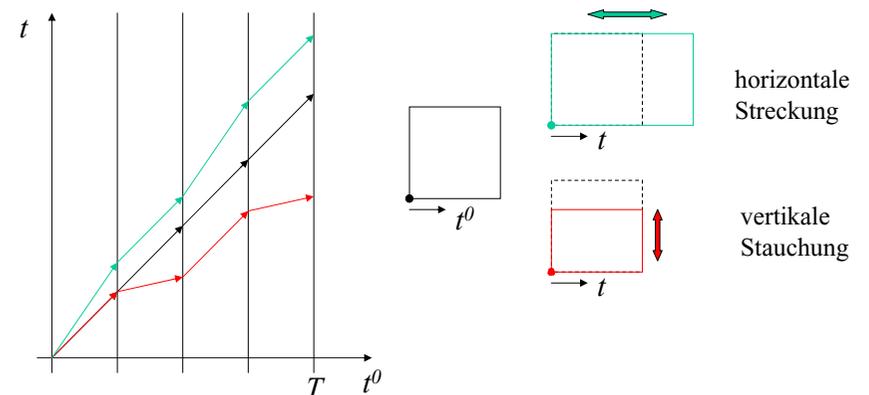
$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} U_k \\ V_k \end{bmatrix} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{x}(t) e^{-j2\pi kt/T} dt$$

Wahl einer Parametrisierung, welche eine lineare (homogene) Abbildung  $t^0 \rightarrow t$  unter der Wirkung der affinen Abbildung  $\mathbf{A}$  garantiert

$$t(t^0, \mathbf{A}) = \mu(\mathbf{A}) \cdot t^0$$

Diese Forderung wird von der Bogenlänge nicht erfüllt!

# Nichtlineare Abbildung über die Bogenlänge bei Scherung der Objekte



# Wahl einer geeigneten Parametrisierung

1. Möglichkeit: Verwendung von Differentialinvarianten zweiter Ordnung in Form der affinen Länge. Benötigt werden:

$$[\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}]$$

2. Möglichkeit: Verwendung von Differentialinvarianten 1. Ordnung und zusätzliche Normierung durch den Flächenschwerpunkt  $\mathbf{x}_s$  (semidifferentieller Ansatz). Benötigt werden:

$$[\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}]$$

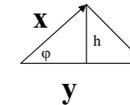
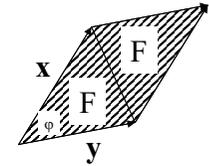
# Das Aussenprodukt und seine geometrische Bedeutung

Das Außenprodukt zwischen zwei Vektoren  $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$  ist eine (vorzeichenbehaftete) reelle Zahl, welche betragsmässig der Fläche des eingeschlossenen Parallelogramms entspricht (oder: 2 mal der Dreiecksfläche)

Außenprodukt:

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \det(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = (x_1 y_2 - x_2 y_1) = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \sin(\varphi)$$

$$\|[\mathbf{x}, \mathbf{y}]\| = 2 \cdot F_{\Delta}$$



$$h = \|\mathbf{x}\| \sin(\varphi)$$

$$F_{\Delta} = \|\mathbf{y}\| \cdot h / 2 = \frac{1}{2} \|\mathbf{y}\| \|\mathbf{x}\| \sin(\varphi)$$

# Ergebnisse aus der Differentialgeometrie

Wir leiten eine Parametrisierung  $t$  geeignet aus der Bogenlänge  $s$  ab.  
Für eine analytische Kurve (beliebig oft stetig differenzierbar) gilt mit Hilfe des Aussenproduktes  $[\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}]$ :

$$\begin{aligned} dt(s) &= (2n+1) \sqrt{[\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^{(n+1)}]} ds = (2n+1) \sqrt{[\mathbf{A}\mathbf{x}^{0^{(n)}}, \mathbf{A}\mathbf{x}^{0^{(n+1)}}]} ds \\ &= \underbrace{(2n+1) \sqrt{|\mathbf{A}|}}_{\mu(\mathbf{A})} \underbrace{(2n+1) \sqrt{[\mathbf{x}^{0^{(n)}}, \mathbf{x}^{0^{(n+1)}}]}}_{dt^0} ds \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

$$\text{mit: } \mathbf{x}^{(n)} = \frac{d^n \mathbf{x}}{ds^n}$$

$$\Rightarrow \boxed{dt = \mu(\mathbf{A}) \cdot dt^0}$$

1. Möglichkeit: Verwendung von Differentialinvarianten zweiter Ordnung in Form der affinen Länge

$$t = \int_C \sqrt{3} \sqrt{[\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}]} ds \quad \text{affine Länge}$$

$$\text{mit: } \dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}(s)}{ds} \quad (s \hat{=} \text{Bogenlänge})$$

$$\text{es gilt: } \underbrace{\int_C \sqrt{3} \sqrt{[\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}]} ds}_t = \underbrace{\sqrt{3} \sqrt{|\mathbf{A}|}}_{\mu(\mathbf{A})} \cdot \underbrace{\int_C \sqrt{[\dot{\mathbf{x}}^0, \ddot{\mathbf{x}}^0]} ds}_{t^0}$$

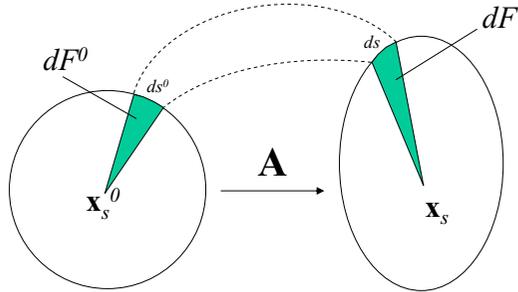
$$\text{und damit: } \boxed{t = \sqrt{3} \sqrt{|\mathbf{A}|} t^0 = \mu(\mathbf{A}) t^0}$$

Problem bei Polygonzügen: entlang von Geraden verschwindet zweite Ableitung und in den Eckpunkten ist 1. Ableitung unstetig und damit die zweite Ableitung nicht definiert!

## 2. Möglichkeit: Verwendung von Differentialinvarianten 1.

Ordnung und zusätzliche Normierung durch den Flächenschwerpunkt  $\mathbf{x}_s$  (semidifferentieller Ansatz)

Man verwendet die von dem vom Schwerpunkt ausgehenden Zeiger an die Kontur überstrichene Fläche zur Parametrisierung (Außenprodukt zwischen Zeiger und Tangentenvektor)



$$\begin{aligned} dF &= \alpha(\mathbf{A}) \cdot dF^0 \\ &= \det(\mathbf{A}) \cdot dF^0 \end{aligned}$$

$$t = F = \int_c \overbrace{[\mathbf{x} - \mathbf{x}_s, \dot{\mathbf{x}}]}^{dF} ds$$

$$= |\mathbf{A}| \int_c \overbrace{[\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}_s^0, \dot{\mathbf{x}}_0]}^{dF^0} ds$$

$$= \mu(\mathbf{A}) \cdot F^0 = \mu(\mathbf{A}) \cdot t^0$$

wegen:

$$\det(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{y}) = \det(\mathbf{A} \cdot (\mathbf{x}, \mathbf{y})) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

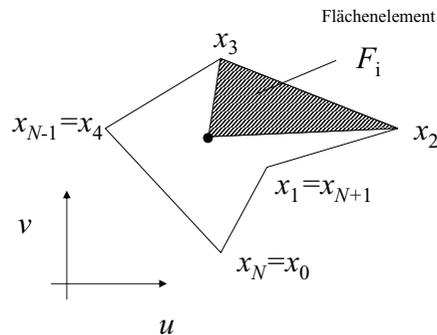
$$\Rightarrow [\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{y}] = \det(\mathbf{A}) \cdot [\mathbf{x}, \mathbf{y}]$$

Die Wirkung der Translation wird eliminiert, wegen der Normierung auf den Flächenschwerpunkt!

Es gilt: Die affine Transformation bildet Flächenschwerpunkte aufeinander und Flächen im konstanten Verhältnis ab!

Das Außenprodukt ist vorzeichenbehaftet! Um Mehrdeutigkeiten bei der Parametrisierung zu vermeiden wählt man den Betrag des Flächenzuwachses  $|dF|$  und damit eine monoton wachsende Parametrisierung!

## Affinvariante Fourierdeskriptoren von Polygonzügen



Polygon:  $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N]$       $\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}$

## Affinvariante Fourierdeskriptoren von Polygonzügen

Flächenschwerpunkt des gesamten Polygonzugs:

$$\mathbf{x}_s = \frac{\frac{1}{3} \sum_{i=0}^{N-1} \overbrace{[\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}]}^{\det(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1})} (\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_{i+1})}{\sum_{i=0}^{N-1} [\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}]} = \frac{\frac{1}{3} \sum_{i=0}^{N-1} (u_i v_{i+1} - u_{i+1} v_i) (\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_{i+1})}{\sum_{i=0}^{N-1} [\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}]}$$

Parameter:  $t_0 = 0$

$$t_{i+1} = t_i + \underbrace{\frac{1}{2} |u'_i v'_{i+1} - u'_{i+1} v'_i|}_{F_i} \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \quad \boxed{T = t_N}$$

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_s = \begin{bmatrix} u - u_s \\ v - v_s \end{bmatrix}$$

# Fourierkoeffizienten

$$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} U_0 \\ V_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2T} \sum_{i=0}^{N-1} (\mathbf{x}_{i+1} + \mathbf{x}_i)(t_{i+1} - t_i)$$

$$\mathbf{X}_k = \begin{bmatrix} U_k \\ V_k \end{bmatrix} = \frac{T}{(2\pi k)^2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(\mathbf{x}'_{i+1} - \mathbf{x}'_i)}{(t_{i+1} - t_i)} (e_{k,i+1} - e_{k,i})(1 - \delta(t_{i+1} - t_i)) \\ + \frac{j}{2\pi k} \sum_{i=0}^{N-1} (\mathbf{x}'_{i+1} - \mathbf{x}'_i) e_{k,i} \delta(t_{i+1} - t_i) \quad \text{für } k \neq 0$$

mit:  $e_{k,i} = e^{-j2\pi k t_i / T}$

$$\delta(t_{i+1} - t_i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t_{i+1} = t_i \text{ (Flächenzuwachs=0)} \\ 0 & \text{falls } t_{i+1} \neq t_i \end{cases}$$

erster Teil transformiert stetige Anteile

zweiter Teil transformiert Unstetigkeiten

(Umschaltung durch  $\delta$ -Operator)

# Fourierkoeffizienten affin verzerrter Konturen

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}^0(t^0 + \tau) + \mathbf{b}$$

$$\mathbf{X}_k = \mathcal{F}(\mathbf{x}(t))$$

$$\mathbf{X}_k^0 = \mathcal{F}(\mathbf{x}^0(t^0))$$

daraus folgt:

$$\mathbf{X}_k = z^k \mathbf{A}\mathbf{X}_k^0 \quad k \neq 0 \text{ (eliminiert Translation)} \\ z = e^{-j2\pi\tau/T}$$

# A-Invarianten ( $\tau=0$ )

mit:

$$\Delta_{kp} = \det[\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_p^*] = \det(\mathbf{A}) \cdot \det[\mathbf{X}_k^0, \mathbf{X}_p^{0*}] = \det(\mathbf{A}) \cdot \Delta_{kp}^0$$

daraus ergeben sich vollständige und minimale Invarianten:

$$Q_k = \frac{\Delta_{kp}}{\Delta_{pp}} = \frac{\det[\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_p^*]}{\det[\mathbf{X}_p, \mathbf{X}_p^*]} = \frac{\cancel{\det(\mathbf{A})} \Delta_{kp}^0}{\cancel{\det(\mathbf{A})} \Delta_{pp}^0} = \frac{U_k^0 V_p^{0*} - V_k^0 U_p^{0*}}{U_p^0 V_p^{0*} - V_p^0 U_p^{0*}} = Q_k^0$$

$$p = \text{const} \neq 0 \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

für  $\tau \neq 0$  ergibt sich hingegen:

$$Q_k = Q_k^0 \cdot z^{k-p} = Q_{kp}^0 \cdot z^k$$

muss noch eliminiert werden

# Zusätzliche Aufpunktinvarianz ( $\tau \neq 0$ )

(spezielle Lösung zweiter Ordnung)

$$I_k = Q_k \Phi_q^{(k-p)\lambda} \Phi_r^{(k-p)\eta}$$

wobei:

$$Q_k = |Q_k| \Phi_k = |Q_k| e^{j\arg(Q_k)}$$

Dabei sind  $(\lambda, \eta)$  ganzzahlige Lösungen der folgenden linearen diophantischen Gleichung:

$$\lambda(q-p) + \eta(r-p) + 1 = 0$$

eine Lösung existiert bei:

$$\text{ggT}(q-p, r-p) = 1$$

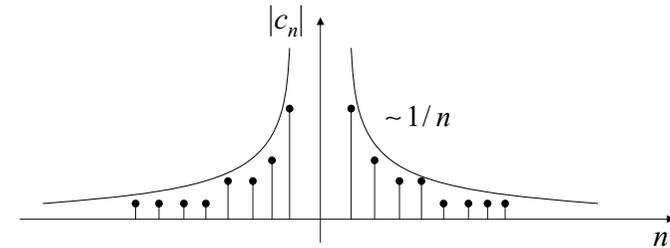
(Lösung mit erweitertem Euklid-Algorithmus)

*Diese Invarianten sind ebenfalls vollständig und minimal!*

Der Ansatz realisiert auch hier eine Kompensation der Phasen, welche unbekannt sind modulo  $2\pi$ .

# Eigenschaften der Fourierreihen

Da die parametrische Konturbeschreibung Unstetigkeiten enthält (Polygonabschnitt in radialer Richtung mit Flächenzuwachs 0) streben die Beträge der FK nur mit  $1/n$  gegen Null, also langsamer als bei stetigen Funktionen.



also zum Beispiel:

$$r = 7, q = 6, p = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} q - p = 5 \\ r - p = 6 \end{array} \right\} \text{ggT}(5, 6) = 1$$

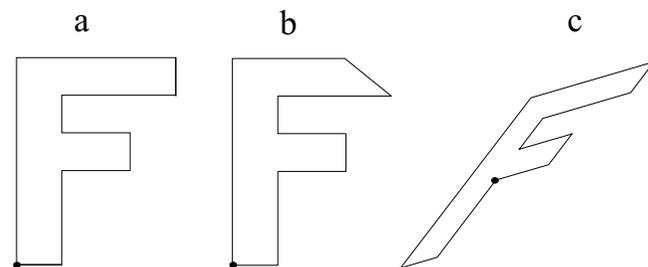
$$\Rightarrow \boxed{\lambda \cdot 5 + \eta \cdot 6 + 1 = 0}$$

erfüllt für:  $\lambda = 1, \eta = -1$

$$\Rightarrow \boxed{I_k = Q_k \Phi_6^{k-1} \Phi_7^{1-k}}$$

Auch hier erhält man aus den Invarianten eindeutig einen Repräsentanten aus der Äquivalenzklasse, d.h. eine Kontur in einer bestimmten Lage und Aufsicht!  
Auch hier ergibt sich eine lineare Berechnungskomplexität bei einer konstanten Anzahl von Fourierdeskriptoren:  
 $O(N)$

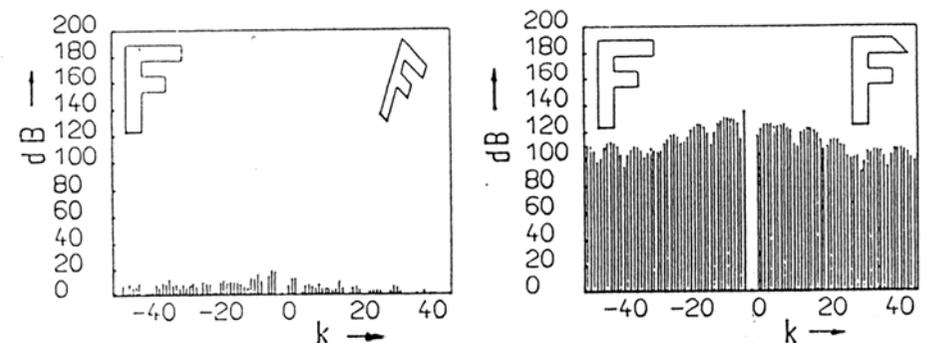
## Affinvariante Fourierdeskriptoren



n	Fourierkoeffizienten						Invarianten		
	a		b		c		$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{c}$
-5	0.107	0.004	0.146	-0.001	-0.086	0.284	<b>0.075</b>	0.094	<b>0.075</b>
-4	-0.006	-0.034	-0.047	-0.058	-0.086	0.311	<b>0.057</b>	0.084	<b>0.057</b>
-3	-0.036	-0.055	-0.001	-0.074	0.126	0.481	<b>0.029</b>	0.014	<b>0.029</b>
-2	0.283	-0.477	0.227	-0.490	-1.560	0.392	<b>0.315</b>	0.290	<b>0.315</b>
-1	-0.263	-0.779	-0.178	-0.733	-5.370	0.661	<b>0.000</b>	0.000	<b>0.000</b>
0	---	---	---	---	---	---	---	---	---
1	-1.120	-1.730	-1.090	-1.650	0.743	-7.330	<b>1.000</b>	1.000	<b>1.000</b>
2	-0.024	-0.375	-0.064	-0.467	0.927	-0.751	<b>0.229</b>	0.252	<b>0.229</b>
3	-0.169	-0.104	-0.191	-0.096	0.702	0.030	<b>0.104</b>	0.111	<b>0.104</b>
4	-0.081	0.182	-0.063	0.175	0.476	-0.385	<b>0.119</b>	0.126	<b>0.119</b>
5	0.066	-0.020	0.057	0.014	0.046	-0.201	<b>0.061</b>	0.059	<b>0.061</b>

$$F' = A \cdot F \quad \text{mit: } F = 0.5 \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 5 & 5 & 2 & 2 & 7 & 7(5) & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 7 & 7 & 9 & 9 & 11 & 11 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

## Leistungsspektren von der Differenz der Invarianten beider Objekte



Unterschied bei realer affiner Abbildung unter Beachtung des Quantisierungsfehlers

Unterschied bei realen Strukturveränderungen