Technische Universität Hamburg-Harburg
Technische Informatik I

# Vollständige Invarianten und Lageberechnung für allgemeine Drehspiegelungen von 3D Objekten

Interner Bericht 4/95

Nicolaos Canterakis
TU Hamburg-Harburg
Technische Informatik I
21071 Hamburg, Germany
canterakis@tu-harburg.d400.de

Mai 1995

# 1 Zusammenfassung

Im vorliegenden Bericht befassen wir uns mit dem Problem der Lageberechnung und der Gewinnung von vollständigen Invarianten für allgemeine Drehspiegelungen von 3D Objekten. Dazu betrachten wir die Wirkung der orthogonalen Gruppe $O(3)$ im Raum aller gebietsweise stetigen Funktionen $f(\boldsymbol{x}) : I\!R^3 \to I\!R^+$ mit kompaktem Träger. Die Behandlung dieses Problems erfolgt am zweckmäßigsten unter Verwendung eines Systems von Basisfunktionen, die an der Gruppe $SO(3)$ angepaßt sind. Es handelt sich hierbei um Polynome $|\boldsymbol{x}|^{2d} e_l^m(\boldsymbol{x})$, $d \in Z\!\!\!Z^+$, wobei die $e_l^m(\boldsymbol{x})$ Kugelfunktionen $l$-ter Ordnung bedeuten. Wir führen den Begriff "Kugelmomente" ein, um Innenprodukte einer Funktion $f(\boldsymbol{x})$, wie oben, mit den Basisfunktionen $|\boldsymbol{x}|^{2d} e_l^m(\boldsymbol{x})$ zu bezeichnen. In diesem Basissystem zerfällt die Wirkung von $SO(3)$ in irreduzible Darstellungen, welche ihrerseits in irreduziblen invarianten Unterräumen wirken.

Wir erarbeiten eine neuartige, sehr kompakte und damit übersichtliche Beschreibung dieser Unterräume. In Zusammenspiel mit der Cayley-Klein Parametrisierung der Gruppe $SO(3)$ erhalten wir einen sehr einfachen Zusammenhang zwischen den Kugelmomenten einer Funktion $f(\boldsymbol{x})$ und deren ihrer Verpflanzung $f(\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{x})$, wobei $\boldsymbol{R} \in O(3)$. Dies gestattet uns, ausgehend von den Kugelmomenten einer vorliegenden Funktion, dieselben der dazugehörigen Normfunktion auf relativ einfache Art und Weise zu berechnen. Das geschieht ohne jeglichen Informationsverlust, weshalb das Ergebnis eine vollständige, $O(3)$-invariante Beschreibung von $f(\boldsymbol{x})$ darstellt. Die Normierung findet ausschließlich im Unterraum statt, der von Polynomen dritter Ordnung aufgespannt wird. Mit anderen Worten, wir verwenden zur Normierung ausschließlich Momente dritter Ordnung. Die Berechnung der Lage und der Parität gegenüber der Normfunktion ist eindeutig.

# 2 Einleitung

Moderne bildgebende Systeme sind in der Lage, Bilddaten zu liefern, die 3D Information enthalten. Beispiele sind medizinische Diagnosesysteme basierend auf Computertomographie (CT), magnetische Resonanz (MRI), oder Positronenemissionstomographie (PET), sowie auch aktive Entfernungsfinder, stereoskopische Rückprojektion u.s.w. In all diesen Fällen erfordert automatische Bilderkennung die Extraktion von Merkmalen, welche invariant bezüglich einer beliebigen 3D Bewegung sein sollten. Darüber hinaus ist für Robotikanwendungen die eindeutige Bestimmung der Lage eines erkannten Objektes von großem Interesse.

Es stellt sich heraus, daß die Untersuchung dieser Probleme in den letzten fünfzehn Jahren sich auf nur wenige Publikationen niederschlägt ([2], [11], [10], [4], [8]), wenn man Verfahren, die sich auf bekannte Punktekorrespondenzen von Projektionen stützen, ausklammert.

In [2] werden $SO(3)$ Invarianten durch Kontraktion von Momententensoren gebildet. Vollständigkeit wird nicht erreicht und die Unabhängigkeit der gebildeten Invarianten

ist nicht garantiert.
In [11] wird der Versuch unternommen, Ergebnisse aus der Theorie von 2D Momenteninvarianten auf 3D zu verallgemeinern. Dies stößt jedoch auf fundamentale Schwierigkeiten, da die Gruppe $SO(3)$, im Gegensatz zu $SO(2)$, nicht kommutativ ist. Deswegen konnten dort nur invariante Momente zweiter Ordnung explizit hergeleitet werden.
In [10] wird die Lage von 3D Objekten aus einer Reihe von kalibrierten Orthogonalprojektionen bestimmt, nachdem zunächst 3D Momente aus den Projektionen berechnet werden. Dieser interessante Ansatz kann wesentlich verbessert werden, wenn man sich auf die niedrigstmögliche Momentenordnung beschränkt. Dann sind weniger Projektionen nötig, und es wird größere Robustheit garantiert.
In [4] wird mit Hilfe von Tensoralgebra eine affine Transformation zwischen Vorlage- und Referenzobjekt berechnet, aber es werden auch Momente bis zur fünften Ordnung gebraucht.
In [8] schließlich werden die Clebsch-Gordan Koeffizienten von Tensorproduktdarstellungen herangezogen. Es werden verschiedene Invarianten niedriger Ordnung hergeleitet, ohne Vollständigkeit anzustreben.

In der vorliegenden Arbeit stellen wir zunächst die notwendigen mathematischen Grundlagen im Kapitel 3 bereit. Im Kapitel 4 definieren wir das Konzept der "$\zeta$-Kodierung" von Kugelfunktionen und -Momenten, das die analytische Behandlung des Problems erheblich vereinfacht. Im Kapitel 5 wird der Normierungsvorgang erläutert und im Kapitel 6 erfolgt die explizite Angabe der Lageberechnung und der vollständigen Invarianten, wobei wir feststellen, daß beide Probleme sehr eng zusammenhängen.
Wir lassen in dieser Arbeit Momente erster und zweiter Ordnung außer Betracht. Momente erster Ordnung sollen zu Null normiert vorausgesetzt werden, womit eine Translationsinvarianz gewährleistet ist. Momente zweiter Ordnung sollen zur zusätzlichen *affinen* Invarianz reserviert werden, wie in [1] geschehen. Dies ist gleichbedeutend mit der Aussage, daß die hier verwendete Normierung auch für Objekte mit kugelförmigem "Trägheitsellipsoid" möglich ist. Außerdem kann man zeigen, daß eine eindeutige Normierung bezüglich Drehspiegelungen bei ausschließlicher Verwendung von Momenten zweiter Ordnung nicht möglich ist.

# 3 Grundlagen

In diesem Abschnitt fassen wir die für diese Arbeit wichtigsten bekannten Fakten über Kugelfunktionen und irreduziblen Darstellungen der Gruppe $SO(3)$ kurz zusammen. Darüber hinaus definieren wir Kugelmomente und leiten einen expliziten Polynomialausdruck für Kugelfunktionen her. Dadurch erhalten wir eine Beziehung, die uns erlaubt Kugelmomente beliebiger Ordnung als Linearkombination von üblichen geometrischen Momenten derselben Ordnung hinzuschreiben.

## 3.1 Kugelfunktionen und Kugelmomente

Der Unterraum $Q_n$, der von allen Monomen der Ordnung $n$ in den drei kartesischen Koordinaten $x$, $y$ und $z$ aufgespannt wird

$$Q_n := < x^n, x^{n-1}y, \dots, x^p y^q z^r, \dots, z^n > \quad ; \quad p+q+r=n \quad ,$$

ist bezüglich jeder linearen Transformation $\boldsymbol{R}$ offensichtlich invariant. D.h., ist $q_n(\boldsymbol{x}) \in Q_n$, so folgt $q_n(\boldsymbol{Rx}) \in Q_n$. Die Dimension von $Q_n$ beträgt $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Schränkt man $\boldsymbol{R}$ auf orthogonale Transformationen ein, $\boldsymbol{R} \in O(3)$, so lassen sich innerhalb $Q_n$ invariante Unterräume finden, die bezüglich der Gruppe $O(3)$ irreduzibel sind. Wir bezeichnen diese Unterräume mit $M_{nl}$ und erhalten eine Zerlegung von $Q_n$ in eine direkte Summe

$$Q_n = M_{nn} \oplus M_{n,n-2} \oplus M_{n,n-4} \oplus \ \cdots \ \oplus \begin{cases} M_{n0} \text{ falls } n \text{ gerade} \\ M_{n1} \text{ falls } n \text{ ungerade} \end{cases} .$$

Die Basiselemente von $M_{nl}$ sind von der Form $(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n-l}{2}} e_l^m(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|^{2d} e_l^m(\boldsymbol{x})$, wobei $n-l=2d$ gerade und nichtnegativ ist, und die Funktionen $e_l^m(\boldsymbol{x})$ Kugelfunktionen $l$-ter Ordnung bedeuten, d.h. sie sind homogene Polynome $l$-ter Ordnung in den drei kartesischen Koordinaten $x$, $y$ und $z$, welche der Laplaceschen Differentialgleichung

$$\Delta e_l^m(\boldsymbol{x}) = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) e_l^m(\boldsymbol{x}) = 0$$

genügen (harmonische Polynome).

*Definition*: Wir bezeichnen Innenprodukte zwischen einer Funktion $f(\boldsymbol{x}) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{R}^3}$ und Basiselementen von $M_{nl}$ mit dem Begriff “Kugelmomente”:

$$F_{nl}^m := \int_{\mathbb{R}^3} f(\boldsymbol{x}) |\boldsymbol{x}|^{n-l} e_l^m(\boldsymbol{x})^* \, d\boldsymbol{x}. \tag{1}$$

Die Dimension des Raumes $K_l$ aller Kugelfunktionen $l$-ter Ordnung, und damit die Dimension von $M_{nl}$ beträgt $2l+1$. Die Dimensionskontrolle ergibt:

$$\begin{aligned} \dim(M_{nn}) + \dim(M_{n,n-2}) + \ \cdots \ + \dim(M_{n0} \text{ oder } M_{n1}) &= \\ = (2n+1) + (2n-3) + (2n-7) + \ \cdots \ + (1 \text{ oder } 3) &= \\ = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \ (\text{ in beiden Fällen }) &= \dim(Q_n). \end{aligned}$$

Wir verwenden eine Indizierung, bei der $m$ von $+l$ bis $-l$ läuft und fragen nach einer expliziten Form der Kugelfunktionen $e_l^m(\boldsymbol{x})$. Da sie homogene Polynome sind, lassen sie sich zunächst unter Verwendung von Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= r \sin\vartheta \cos\phi \\ y &= r \sin\vartheta \sin\phi \\ z &= r \cos\vartheta \end{aligned}$$

in die Form $e_l^m(\boldsymbol{x}) = r^l Y_l^m(\vartheta, \phi)$ bringen, womit das Problem auf die Bestimmung der sog. Kugelflächenfunktionen $Y_l^m(\vartheta, \phi)$ verlagert wird. In der einschlägigen Literatur findet man darüber meistens nur ein Ergebnis, das auf die Formel von Rodrigues für die Legendre-Polynome basiert ([6], [7]):

$$Y_l^m(\vartheta, \phi) = P_l^m(\vartheta) \cdot e^{jm\phi} \quad \text{und}$$

$$P_l^m(\vartheta) \sim (j \sin \vartheta)^m \cdot \frac{d^{l+m}}{du^{l+m}}[(u^2-1)^l]\Big|_{u=\cos\vartheta}$$

(assoziierte Legendre Funktionen),
so daß

$$(Y_l^m, Y_{l'}^{m'}) := \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} Y_l^m(\vartheta, \phi) Y_{l'}^{m'}(\vartheta, \phi)^* \sin\vartheta \; d\vartheta d\phi \sim \delta_{ll'} \delta^{mm'}$$

(orthogonal auf der Oberfläche der Einheitskugel). Hierbei haben wir konstante reelle Faktoren außer acht gelassen. Obwohl die Eigenschaften der Unterräume $M_{nl}$ in großer Einzelheit bereits erforscht und bekannt sind, ist der explizite, analytische Umgang mit Kugelfunktionen und insbesondere mit ihrer Verpflanzung unter der Wirkung von Drehspiegelungen nach wie vor sehr schwerfällig.

Zur Aufhebung dieser Situation gehen wir von einer Integraldarstellung der assoziierten Legendre Funktionen $P_l^m(\vartheta)$ aus, die in [3], oder [13] zu finden ist:

$$P_l^m(\vartheta) \sim \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos\vartheta + j \sin\vartheta \cos\gamma)^l e^{-jm\gamma} \, d\gamma \quad .$$

Wir entwickeln den Binomialausdruck unter dem Integralzeichen und erhalten

$$P_l^m(\vartheta) \sim \sum_\lambda \begin{pmatrix} l \\ \lambda \end{pmatrix} (\cos\vartheta)^{l-\lambda} (j \sin\vartheta)^\lambda \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos\gamma)^\lambda e^{-jm\gamma} \, d\gamma \quad . \tag{2}$$

Wir lassen hier und im folgenden die Grenzen der Laufvariablen von Summenzeichen weg. Innerhalb der vorliegenden Arbeit lassen sie sich immer leicht ermitteln, wenn die Definition

$$\begin{pmatrix} l \\ \lambda \end{pmatrix} := \begin{cases} \frac{l!}{\lambda!(l-\lambda)!} & \text{falls} \quad 0 \le \lambda \le l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

zugrunde gelegt wird. Die Laufvariable erstreckt sich dann also über alle ganzzahligen Werte, für die die vorkommenden Binomialkoeffizienten ungleich Null sind.

Mit Hilfe der Euler Beziehung $\cos\gamma = \frac{e^{j\gamma}+e^{-j\gamma}}{2}$ erhält man nun

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos\gamma)^\lambda e^{-jm\gamma} \, d\gamma &= \frac{1}{2^\lambda} \sum_\nu \begin{pmatrix} \lambda \\ \nu \end{pmatrix} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(e^{j\gamma}\right)^{\lambda-m-2\nu} \, d\gamma \\ &= \frac{1}{2^\lambda} \sum_\nu \begin{pmatrix} \lambda \\ \nu \end{pmatrix} \delta(\lambda - m - 2\nu). \end{aligned}$$

Wir bekommen also von Null verschiedene Beiträge in (2), wenn $\lambda - m$ gerade und nichtnegativ ist. Die Substitution $\lambda - m = 2\mu$ ergibt dann

$$P_l^m(\vartheta) \sim \left(j\frac{\sin\vartheta}{2}\right)^m (\cos\vartheta)^{l-m} \sum_\mu \binom{l}{2\mu+m}\binom{2\mu+m}{\mu}\left(-\frac{(\tan\vartheta)^2}{4}\right)^\mu .$$

Wir berücksichtigen noch

$$\binom{l}{2\mu+m}\binom{2\mu+m}{\mu} = \binom{l}{\mu}\binom{l-\mu}{m+\mu}$$

und erhalten schließlich

$$e_l^m(\boldsymbol{x}) \sim r^l \left(j\frac{\sin\vartheta}{2}e^{j\phi}\right)^m (\cos\vartheta)^{l-m} \sum_\mu \binom{l}{\mu}\binom{l-\mu}{m+\mu}\left(-\frac{(\tan\vartheta)^2}{4}\right)^\mu \quad ,$$

oder in kartesischen Koordinaten

$$e_l^m(\boldsymbol{x}) \sim \left[\frac{j}{2}(x+jy)\right]^m z^{l-m} \sum_\mu \binom{l}{\mu}\binom{l-\mu}{m+\mu}\left(-\frac{x^2+y^2}{4z^2}\right)^\mu =: \hat{e}_l^m(\boldsymbol{x})\,. \tag{3}$$

Hierbei haben wir auf der rechten Seite die nichtnormalisierten Kugelfunktionen $\hat{e}_l^m(\boldsymbol{x})$ definiert. Über die Grenzen der Laufvariablen $\mu$ stellen wir hier leicht fest: $\max(0, -m) \leq \mu \leq \lfloor\frac{l-m}{2}\rfloor$. Obiger Ausdruck stellt also für $m \geq 0$ offensichtlich homogene Polynome in $x$, $y$ und $z$ dar. Wir notieren hier, daß dies auch für $m < 0$ zutrifft, wobei die Symmetriebeziehung gilt:

$$e_l^{-m}(\boldsymbol{x}) = (-1)^m e_l^m(\boldsymbol{x})^*. \tag{4}$$

Gl. (3) ist bereits ein sehr nützliches Zwischenergebnis, da es uns gestattet die (nichtnormalisierten) Kugelmomente

$$\hat{F}_{nl}^m := \int_{\mathbb{R}^3} f(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x}|^{n-l}\hat{e}_l^m(\boldsymbol{x})^*\, d\boldsymbol{x} \tag{5}$$

einer Funktion $f(\boldsymbol{x})$ zu berechnen, wenn ihre geometrischen Momente vorliegen, wofür aber schnelle Algorithmen, die für $2D$ Bilder entwickelt worden sind [5], direkt auf $3D$ verallgemeinert werden können.

$$\hat{F}_{nl}^m = \left(\frac{-j}{2}\right)^m \sum_\mu \left(-\frac{1}{4}\right)^\mu \binom{l}{\mu}\binom{l-\mu}{m+\mu} \int_{\mathbb{R}^3} f(\boldsymbol{x})(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n-l}{2}}(x^2+y^2)^\mu(x-jy)^m z^{l-m-2\mu}\, d\boldsymbol{x}. \tag{6}$$

Man beachte, daß der Integralausdruck in obiger Formel eine Linearkombination von geometrischen Momenten n-ter Ordnung darstellt, und daß die Symmetrie (4) bei reellem $f(\boldsymbol{x})$ sich auf die Kugelmomente überträgt

$$\hat{F}_{nl}^{-m} = (-1)^m(\hat{F}_{nl}^m)^*. \tag{7}$$

Für analytische Zwecke viel interessanter jedoch, ist die im Kapitel 4 zu definierende "$\zeta$-Kodierung" von Kugelfunktionen und -Momenten.

Wir bestimmen noch Normalisierungskoeffizienten für die Funktionen $e_l^m(\boldsymbol{x})$ derart, daß sie ein Orthonormalsystem auf der Oberfläche der Einheitskugel bilden. Dazu berechnen wir unter Verwendung von

$$\int_0^{\pi} (\sin\vartheta)^{2n+1}(\cos\vartheta)^{2m}\, d\vartheta = 2^{2n+1}\begin{pmatrix} 2m \\ m \end{pmatrix} \Big/ \begin{pmatrix} 2(m+n) \\ m+n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m+n \\ n \end{pmatrix}[2(m+n)+1]$$

das Normquadrat von $\hat{e}_l^m(\boldsymbol{x})$ für $|\boldsymbol{x}| = 1$ :

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} |\hat{e}_l^m(\boldsymbol{x})|^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, \mathrm{d}\,\phi = \frac{(l!)^2}{(2l+1)(l+m)!(l-m)!} \quad .$$

Mit der Definition

$$c_l^m := \frac{\sqrt{(2l+1)(l+m)!(l-m)!}}{l!} = c_l^{-m} \tag{8}$$

erhalten wir also

$$e_l^m(\boldsymbol{x}) = c_l^m \cdot \hat{e}_l^m(\boldsymbol{x}) \tag{9}$$

orthonormal auf $|\boldsymbol{x}| = 1$ . Da wir vorwiegend mit nichtnormalisierten Kugelfunktionen $\hat{e}_l^m(\boldsymbol{x})$ und -Momenten $\hat{F}_{nl}^m$ arbeiten werden, notieren wir, daß für letztere sinngemäß $F_{nl}^m = c_l^m \hat{F}_{nl}^m$ gilt, und daß die Verbindung zu den normalisierten Größen über die Konstanten $c_l^m$ jederzeit wiederhergestellt werden kann.

## 3.2 Irreduzible Darstellungen der Gruppe $SO(3)$

Für jedes nichtnegative, ganzzahlige $l$ definieren wir einen $(2l+1)$-dimensionalen Vektor $\boldsymbol{e}_l(\boldsymbol{x})$, der alle Kugelfunktionen $l$-ter Ordnung als Komponenten enthält:

$$\boldsymbol{e}_l(\boldsymbol{x}) := \left(e_l^l(\boldsymbol{x}), e_l^{l-1}(\boldsymbol{x}), \cdots, e_l^{-l}(\boldsymbol{x})\right)^T \quad . \tag{10}$$

Nun wird die Invarianz der Unterräume $M_{ll}$ unter der Wirkung der Drehgruppe $SO(3)$ durch das Gesetz

$$\boldsymbol{e}_l(\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}_l(\boldsymbol{P})\boldsymbol{e}_l(\boldsymbol{x}) \;\; ; \quad \boldsymbol{P} \in SO(3) \tag{11}$$

reflektiert [3]. Wegen der Invarianz von $|\boldsymbol{x}|$ $(|\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{x}|)$, gilt das gleiche auch für die Unterräume $M_{nl}$. Die $(2l+1)\times(2l+1)$- Matrizen $\boldsymbol{o}_l(\boldsymbol{P})$, die obigen linearen Zusammenhang vermitteln, hängen nur von den Gruppenparametern ab und sind unitär. Wie man aus obiger Gleichung unschwer sehen kann, erfüllen sie das Homomorphiegesetz

$$\boldsymbol{o}_l(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2) = \boldsymbol{o}_l(\boldsymbol{P}_1)\boldsymbol{o}_l(\boldsymbol{P}_2) \quad .$$

Sie bilden also eine unitäre Darstellung der Gruppe $SO(3)$, die zudem, wie bereits erwähnt, irreduzibel ist. Da wir mit nichtnormalisierten Kugelfunktionen arbeiten wollen, müssen wir das Gesetz (11) modifizieren: Elementweise hingeschrieben lautet es:

$$e_l^m(\boldsymbol{Px}) = \sum_{n=-l}^{l} o_l^{mn}(\boldsymbol{P}) e_l^n(\boldsymbol{x}) \quad ,$$

woraus wir mit (9) bekommen

$$\hat{e}_l^m(\boldsymbol{Px}) = \sum_{n=-l}^{l} \frac{c_l^n}{c_l^m} o_l^{mn}(\boldsymbol{P}) \hat{e}_l^n(\boldsymbol{x}) \, . \tag{12}$$

Wir bezeichnen $\frac{c_l^n}{c_l^m} o_l^{mn}$ mit $\hat{o}_l^{mn}$ und erhalten schließlich mit selbsterklärender Notation

$$\hat{\boldsymbol{e}}_l(\boldsymbol{Px}) = \hat{\boldsymbol{o}}_l(\boldsymbol{P}) \hat{\boldsymbol{e}}_l(\boldsymbol{x}) \, . \tag{13}$$

Obwohl die Matrizen $\hat{\boldsymbol{o}}_l(\boldsymbol{P})$ eine zu den $\boldsymbol{o}_l(\boldsymbol{P})$ äquivalente Darstellung bilden, sind sie nicht mehr unitär. Dafür bieten sie aber erhebliche analytische Vorteile an, wie wir in den folgenden Kapiteln feststellen werden.

# 4 Die $\zeta$-Kodierung

## 4.1 Definition

Für jedes nichtnegative ganzzahlige $l$ definieren wir einen $(2l+1)$-dimensionalen Vektor $\boldsymbol{p}_l(\zeta)$ mittels

$$\boldsymbol{p}_l(\zeta) := \left(\zeta^l, \zeta^{l-1}, \cdots, \zeta^{-l}\right)^T \quad , \quad \zeta \in \mathbb{C} \quad ,$$

und bilden das Produkt

$$\hat{e}_l(\boldsymbol{x};\zeta) := \boldsymbol{p}_l(\zeta)^T \hat{\boldsymbol{e}}_l(\boldsymbol{x}) = \sum_{m=-l}^{l} \hat{e}_l^m(\boldsymbol{x}) \zeta^m \, . \tag{14}$$

Damit haben wir die Kugelfunktionen $l$-ter Ordnung in die Koeffizienten eines Polynoms $2l$-ter Ordnung in $\zeta$, dividiert durch $\zeta^l$, kodiert. Das ist also eine Art generierende Funktion für Kugelfunktionen, die wir mit "$\zeta$ - Kodierung von Kugelfunktionen" bezeichnen. Wir wollen $\hat{e}_l(\boldsymbol{x};\zeta)$ berechnen. Aus (3) bekommen wir

$$\begin{aligned}
\hat{e}_l(\boldsymbol{x};\zeta) &= z^l \sum_{\mu} \binom{l}{\mu} \left(-\frac{x^2+y^2}{4z^2}\right)^{\mu} \sum_m \binom{l-\mu}{m+\mu} \left[\frac{j}{2}\frac{x+jy}{z}\zeta\right]^m \\
&= z^l \sum_{\mu} \binom{l}{\mu} \left(j\frac{x-jy}{2z\zeta}\right)^{\mu} \left(1+\frac{j}{2}\frac{x+jy}{z}\zeta\right)^{l-\mu}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\frac{2z+j(x+jy)\zeta}{2}\right]^l \sum_\mu \binom{l}{\mu} \left[j\frac{x-jy}{[2z+j(x+jy)\zeta]\zeta}\right]^\mu \\
&= \left[\frac{2z+j(x+jy)\zeta+j(x-jy)\zeta^{-1}}{2}\right]^l \\
&= \left[(\zeta,1,\zeta^{-1})\left(\frac{j}{2}(x+jy),z,\frac{j}{2}(x-jy)\right)^T\right]^l ,
\end{aligned}
$$

und schließlich mit der Definition einer konstanten Matrix $\boldsymbol{S} := \begin{pmatrix} j/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ j/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ :

$$
\hat{e}_l(\boldsymbol{x};\zeta) = \left[\boldsymbol{p}_1(\zeta)^T \boldsymbol{S}\boldsymbol{x}\right]^l \tag{15}
$$

und daher

$$
\hat{e}_l(\boldsymbol{x};\zeta) = [\hat{e}_1(\boldsymbol{x};\zeta)]^l \ . \tag{16}
$$

Dies ist ein Resultat von bemerkenswerter Einfachheit: Die $\zeta$-Kodierung von Kugelfunktionen $l$-ter Ordnung ist gleich der $l$-ten Potenz der $\zeta$-Kodierung von Kugelfunktionen 1-ter Ordnung. Mit anderen Worten: $\hat{e}_l^m(\boldsymbol{x})$ ist der Koeffizient von $\zeta^m$ in der Entwicklung des Ausdrucks $\left[\hat{e}_1^1(\boldsymbol{x})\cdot\zeta + \hat{e}_1^0(\boldsymbol{x}) + \hat{e}_1^{-1}(\boldsymbol{x})\cdot\zeta^{-1}\right]^l$. Damit verfügen wir über ein einfaches Handwerkszeug, um mit Kugelfunktionen umzugehen. Der Schlüssel besteht also darin, die Unterräume $M_{nl}$ über die $\zeta$-Kodierung als Ganzes zu behandeln.

Bevor wir im nächsten Abschnitt die weittragenden Konsequenzen dieses Gesetzes bezüglich Verpflanzungen der Kugelfunktionen unter der Wirkung der Drehgruppe $SO(3)$ studieren, bemerken wir, daß aus (14) und (15) folgt:

$$
\hat{e}_1(\boldsymbol{x};\zeta) = \boldsymbol{p}_1(\zeta)^T \hat{\boldsymbol{e}}_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}_1(\zeta)^T \boldsymbol{S}\boldsymbol{x} \ ,
$$

also

$$
\hat{\boldsymbol{e}}_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{S}\boldsymbol{x} \ . \tag{17}
$$

## 4.2 $\zeta$-Kodierung und Drehmatrizen

Im vorigen Abschnitt haben wir die Unterräume $M_{ll}$ und damit auch $M_{nl} = |\boldsymbol{x}|^{n-l}\cdot M_{ll}$ über die $\zeta$-Kodierung auf sehr kompakte Art und Weise beschrieben. Nun wollen wir untersuchen, was eine Drehung von $\boldsymbol{x}$ in den Unterräumen $M_{nl}$ bewirkt. Dazu bedienen wir uns der erarbeiteten Beschreibung dieser Unterräume und fragen nach einer geeigneten Parametrisierung von $SO(3)$. Es stellt sich heraus, daß sehr gute Dienste hierbei die Cayley-Klein Parametrisierung erweist. Man erhält sie über die stereographische Projektion [6] , oder über den Homomorphismus von $SO(3)$ zu der speziellen unitären Gruppe

$SU(2)$ [12]. Ohne auf diese Konzepte hier weiter einzugehen, geben wir diese Parametrisierung in folgender Form an:

$$\boldsymbol{P}(a,b) = \begin{pmatrix} \Re\{a^2+b^2\} & -\Im\{a^2-b^2\} & 2\Im\{ab\} \\ \Im\{a^2+b^2\} & \Re\{a^2-b^2\} & -2\Re\{ab\} \\ 2\Im\{ab^*\} & 2\Re\{ab^*\} & aa^*-bb^* \end{pmatrix} \;;\; a,b \in \mathbb{C} \;,\; aa^*+bb^*=1.$$

Es sei erwähnt, daß die komplexen Zahlenpaare $(a,b)$ und $(-a,-b)$ mit $aa^*+bb^*=1$ auf die gleiche Drehmatrix $\boldsymbol{P}$ führen, und daß jede andere Parametrisierung von $SO(3)$ (z.B. Drehachse-Drehwinkel, Eulerwinkel, u.s.w.) in umkehrbar eindeutiger Art und Weise mit der oben angegebenen zusammenhängt. Für die Inverse gilt

$$\boldsymbol{P}(a,b)^{-1} = \boldsymbol{P}(a,b)^T = \boldsymbol{P}(a^*,-b)$$

und die Identität erhält man über $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{P}(1,0)$.

Als Grundlage für die weiteren Überlegungen müssen wir zunächst die Darstellung $\hat{\boldsymbol{o}}_1(\boldsymbol{P})$ bestimmen. Dafür schreiben wir auch $\hat{\boldsymbol{o}}_1(a,b)$ und bekommen aus (13) und (17) einerseits

$$\hat{\boldsymbol{e}}_1(\boldsymbol{Px}) = \hat{\boldsymbol{o}}_1(a,b)\hat{\boldsymbol{e}}_1(\boldsymbol{x}) = \hat{\boldsymbol{o}}_1(a,b)\boldsymbol{Sx} \;,$$

und andererseits

$$\hat{\boldsymbol{e}}_1(\boldsymbol{Px}) = \boldsymbol{SPx}.$$

Das bedeutet

$$\hat{\boldsymbol{o}}_1(a,b)\boldsymbol{S} = \boldsymbol{SP}(a,b) \;,$$

oder

$$\hat{\boldsymbol{o}}_1(a,b) = \boldsymbol{SP}(a,b)\boldsymbol{S}^{-1}.$$

Die Darstellung $\hat{\boldsymbol{o}}_1$ von $SO(3)$ ist also äquivalent zur Selbstdarstellung dieser Gruppe und mit der verwendeten Parametrisierung rechnen wir leicht nach:

$$\hat{\boldsymbol{o}}_1(a,b) = \begin{pmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ -2ab^* & aa^*-bb^* & 2a^*b \\ (b^*)^2 & -a^*b^* & (a^*)^2 \end{pmatrix}.$$

Nun sind wir in der Lage, die Wirkung von $\boldsymbol{P}$ im Unterraum $M_{11}$ explizit hinzuschreiben.

$$\hat{e}_1(\boldsymbol{Px};\zeta) = \boldsymbol{p}_1(\zeta)^T\hat{\boldsymbol{e}}_1(\boldsymbol{Px}) = \boldsymbol{p}_1(\zeta)^T\hat{\boldsymbol{o}}_1(a,b)\hat{\boldsymbol{e}}_1(\boldsymbol{x}).$$

Der letzte Ausdruck verlangt eine $\zeta$-Kodierung der Spalten von $\hat{\boldsymbol{o}}_1(a,b)$. Wir führen dies durch und erreichen eine Faktorisierung in allen drei Spalten:

$$\boldsymbol{p}_1(\zeta)^T\hat{\boldsymbol{o}}_1(a,b) = \frac{1}{\zeta}\left[(a\zeta-b^*)^2, (a\zeta-b^*)(b\zeta+a^*), (b\zeta+a^*)^2\right] \;,$$

oder

$$\boldsymbol{p}_1(\zeta)^T\hat{\boldsymbol{o}}_1(a,b) = \frac{(a\zeta-b^*)(b\zeta+a^*)}{\zeta}\cdot\boldsymbol{p}_1\left(\frac{a\zeta-b^*}{b\zeta+a^*}\right)^T$$

und somit

$$\hat{e}_1(\boldsymbol{P}\boldsymbol{x};\zeta) = \frac{(a\zeta - b^*)(b\zeta + a^*)}{\zeta} \cdot \hat{e}_1\left(\boldsymbol{x}; \frac{a\zeta - b^*}{b\zeta + a^*}\right).$$

Daraus liefert die fundamentale Beziehung (16) für jede beliebige Dimension

$$\hat{e}_l(\boldsymbol{P}\boldsymbol{x};\zeta) = \left[\frac{(a\zeta - b^*)(b\zeta + a^*)}{\zeta}\right]^l \cdot \hat{e}_l\left(\boldsymbol{x}; \frac{a\zeta - b^*}{b\zeta + a^*}\right). \tag{18}$$

Wir erweitern diese Ergebnisse derart, daß auch Spiegelungen miteinbezogen werden können. Dazu schreiben wir allgemein $3 \times 3$ orthogonale Matrizen $\boldsymbol{R}$ in folgender Produktform:

$$\boldsymbol{R} := \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \varepsilon \end{pmatrix} \boldsymbol{P} =: \boldsymbol{E}\boldsymbol{P} \quad ; \quad \varepsilon = \pm 1 \quad ; \quad \boldsymbol{P} \in SO(3)\ ,\ \boldsymbol{R} \in O(3).$$

Aus (3) bestimmen wir die Wirkung einer Spiegelung an der $x$-$y$ Ebene auf die Kugelfunktionen $\hat{e}_l^m(\boldsymbol{x})$:

$$\hat{e}_l^m(\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}) = \varepsilon^{l-m}\hat{e}_l^m(\boldsymbol{x}). \tag{19}$$

Die Definition (14), sowie (18) ergeben schließlich

$$\hat{e}_l(\boldsymbol{R}\boldsymbol{x};\zeta) = \left[\frac{(a\varepsilon\zeta - b^*)(b\varepsilon\zeta + a^*)}{\zeta}\right]^l \cdot \hat{e}_l\left(\boldsymbol{x}; \frac{a\varepsilon\zeta - b^*}{b\varepsilon\zeta + a^*}\right). \tag{20}$$

Wir beobachten, daß über die $\zeta$-Kodierung die Wirkung der orthogonalen Gruppe in den Unterräumen $M_{nl}$ im wesentlichen in eine gebrochen lineare Abbildung der unabhängigen Variablen $\zeta$ übersetzt wird, was analytisch viel einfacher zu handhaben ist.

## 4.3 $\zeta$-Kodierung und Kugelmomente

Das Konzept der $\zeta$-Kodierung läßt sich unmittelbar auf die Kugelmomente übertragen. Wir fassen alle Kugelmomente $\hat{F}_{nl}^m$ eines Objektes $f(\boldsymbol{x})$ mit gleichen unteren Indizes in einem Vektor $\hat{\boldsymbol{F}}_{nl}$ zusammen

$$\hat{\boldsymbol{F}}_{nl} := \left(\hat{F}_{nl}^l, \hat{F}_{nl}^{l-1}, \cdots, \hat{F}_{nl}^{-l}\right)^T = \int_{\mathbb{R}^3} f(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x}|^{n-l}\hat{\mathbf{e}}_l(\boldsymbol{x})^*\, d\boldsymbol{x} \tag{21}$$

und definieren in Analogie zu (14) die $\zeta$-Kodierung von Kugelmomenten über das Produkt

$$\hat{F}_{nl}(\zeta) := \boldsymbol{p}_l(\zeta)^T\hat{\boldsymbol{F}}_{nl} = \int_{\mathbb{R}^3} f(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x}|^{n-l}\hat{e}_l(\boldsymbol{x};\zeta^*)^*\, d\boldsymbol{x}. \tag{22}$$

Nun können wir die Wirkung der Gruppe $O(3)$ auf die $\zeta$-kodierten Kugelmomente berechnen. Dazu führen wir die Bezeichnung

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x}|^{n-l}\hat{e}_l(\boldsymbol{x};\zeta^*)^*\, d\boldsymbol{x} =: \left(\hat{F}_R\right)_{nl}(\zeta)$$

ein, und erhalten aus (20)

$$\begin{aligned}\left(\hat{F}_R\right)_{nl}(\zeta) &= \int_{\mathbb{R}^3} f(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{Rx}|^{n-l}\hat{e}_l(\boldsymbol{Rx};\zeta^*)^*\, d\boldsymbol{x} \\ &= \left[\frac{(a^*\varepsilon\zeta - b)(b^*\varepsilon\zeta + a)}{\zeta}\right]^l \int_{\mathbb{R}^3} f(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x}|^{n-l}\hat{e}_l\left(\boldsymbol{x};\frac{a\varepsilon\zeta^* - b^*}{b\varepsilon\zeta^* + a^*}\right)^*\, d\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

Dies ergibt mit (22) den Ausgangspunkt der weiteren Analyse:

$$\left(\hat{F}_{\mathrm{R}}\right)_{nl}(\zeta) = \left[\frac{(a^*\varepsilon\zeta - b)(b^*\varepsilon\zeta + a)}{\zeta}\right]^l \cdot \hat{F}_{nl}\left(\frac{a^*\varepsilon\zeta - b}{b^*\varepsilon\zeta + a}\right). \tag{23}$$

Wir werden auch von der *Umkehrung* dieser Beziehung Gebrauch machen, die man durch die Substitution $\zeta \to \varepsilon\frac{a\zeta+b}{-b^*\zeta+a^*}$ erhält:

$$\hat{F}_{nl}(\zeta) = \left[\varepsilon\frac{(a\zeta + b)(-b^*\zeta + a^*)}{\zeta}\right]^l \cdot \left(\hat{F}_{\mathrm{R}}\right)_{nl}\left(\varepsilon\frac{a\zeta + b}{-b^*\zeta + a^*}\right). \tag{24}$$

# 5 Normierung und Zwischenvariablen

In diesem Kapitel treffen wir die Vereinbarung, daß Größen ohne den Index $R$ (z.B. $\hat{F}_{nl}^m$, oder $\hat{F}_{nl}(\zeta)$ u.s.w.) sich auf ein Objekt in der Standardlage beziehen (Normobjekt). Hingegen soll der Index $R$ darauf hinweisen, daß die betroffene Größe sich auf die Verpflanzung $f_R(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{x})$ des Normobjektes bezieht.
Unser Ziel ist nun, ausgehend von den Kugelmomenten $\left(\hat{F}_R\right)_{nl}^m$, mittels einer Reihe von konfliktfreien Normierungen, die Kugelmomente $\hat{F}_{nl}^m$ des Normobjektes zu berechnen.
Dazu werden wir einen Algorithmus, den wir in [1] unter Verwendung der Lie-Theorie [9] hergeleitet haben, unverändert übernehmen. Wir reformulieren hier seine Zwischenschritte über die $\zeta$-Kodierung und erhalten eine kurze Kette von Hilfsvariablen mit abnehmender Abhängigkeit von den Gruppenparametern. Aufgrund des ausgeprägt analytischen Übertragungsverhaltens zwischen den $\zeta$-kodierten Hilfsvariablen, sind wir in der Lage in jeder Stufe die Beziehung zu Variablen vorangehender Stufen sowohl vom aktuellen, als auch vom Normobjekt anzugeben.

## 5.1 Normierung im Unterraum $M_{31}$

Es ist einfach aus (1), (11) und (19) zu sehen:

$$(\boldsymbol{F}_R)_{nl} = \mathrm{diag}(1,\varepsilon,1,\varepsilon,\cdots,\varepsilon,1)\cdot \boldsymbol{o}_l(\boldsymbol{P})^* \cdot \boldsymbol{F}_{nl}. \tag{25}$$

Da $\boldsymbol{o}_l$ unitär ist, folgt daraus $|(\boldsymbol{F}_R)_{nl}|^2 = |\boldsymbol{F}_{nl}|^2$. Dies ist eine klassische Invariante für das betrachtete Problem, liefert aber für jeden $(2l+1)$-dimensionalen invarianten Unterraum nur einen einzigen Wert. Wir beschäftigen uns insbesondere mit dem Fall $n = 3$ und $l = 1$ und erhalten zunächst

$$\left|(F_R)_{31}^1\right|^2 + \left|(F_R)_{31}^0\right|^2 + \left|(F_R)_{31}^{-1}\right|^2 = \left|F_{31}^1\right|^2 + \left|F_{31}^0\right|^2 + \left|F_{31}^{-1}\right|^2.$$

Wir erinnern hier daran, daß bei reellen Objekten $f(\boldsymbol{x})$ die Symmetrie (4) der Kugelfunktionen sich auf die Kugelmomente überträgt:

$$F_{nl}^{-m} = (-1)^m \left(F_{nl}^m\right)^*,$$

woraus die Betragsgleichheit folgt:

$$\left|F_{nl}^{-m}\right| = \left|F_{nl}^m\right|.$$

Unter Verwendung von $c_1^1 = \sqrt{6}$ und $c_1^0 = \sqrt{3}$ (s. (8)) folgt dann aus oben

$$\sqrt{\left|\left(\hat{F}_R\right)_{31}^1\right|^2 + \left[\frac{1}{2}\left(\hat{F}_R\right)_{31}^0\right]^2} = \sqrt{\left|\hat{F}_{31}^1\right|^2 + \left(\frac{1}{2}\hat{F}_{31}^0\right)^2} =: C.$$

Diese Gleichung motiviert die Definitionen

$$\begin{aligned} \left(\hat{F}_R\right)_{31}^1 &=: C\cos\psi_R \cdot e^{j(\phi_R)_{31}^1} \\ \left(\hat{F}_R\right)_{31}^0 &=: 2C\sin\psi_R, \end{aligned}$$

$$\text{wobei} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \psi_R \leq \frac{\pi}{2}.$$

Der Momentenvektor $\left(\hat{\boldsymbol{F}}_R\right)_{31}$ sieht also folgendermaßen aus:

$$\left(\hat{\boldsymbol{F}}_R\right)_{31} = C \begin{pmatrix} \cos\psi_R \cdot e^{j(\phi_R)_{31}^1} \\ 2\sin\psi_R \\ -\cos\psi_R \cdot e^{-j(\phi_R)_{31}^1} \end{pmatrix},$$

und (25) ergibt

$$\left(\hat{\boldsymbol{F}}_R\right)_{31} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \varepsilon & \\ & & 1 \end{pmatrix} \hat{\boldsymbol{o}}_1(a,b)^* C \begin{pmatrix} \cos\psi e^{j\phi_{31}^1} \\ 2\sin\psi \\ -\cos\psi e^{-j\phi_{31}^1} \end{pmatrix}.$$

Für das Normobjekt treffen wir nun die *Normierungen*

$$\psi = \phi_{31}^1 = 0$$

und erhalten

$$\begin{pmatrix} \cos\psi_R \cdot e^{j(\phi_R)^1_{31}} \\ 2\sin\psi_R \\ -\cos\psi_R \cdot e^{-j(\phi_R)^1_{31}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \varepsilon & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (a^*)^2 & a^*b^* & (b^*)^2 \\ -2a^*b & aa^*-bb^* & 2ab^* \\ b^2 & -ab & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Wir führen die abkürzenden Bezeichnungen

$$(a^*)^2 - (b^*)^2 =: \mu$$

und

$$-\varepsilon(ab^* + a^*b) =: \lambda$$

ein, und bekommen

$$\begin{pmatrix} \cos\psi_R \cdot e^{j(\phi_R)^1_{31}} \\ 2\sin\psi_R \\ -\cos\psi_R \cdot e^{-j(\phi_R)^1_{31}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ 2\lambda \\ -\mu^* \end{pmatrix} = \left(\hat{\boldsymbol{F}}_R\right)_{31} \Big/ C.$$

Man beachte, daß $\mu$ und $\lambda$ zahlenmäßig bekannte Größen darstellen und die Identität $\lambda^2 + \mu\mu^* = 1$ erfüllen. Dank (6) können wir sie über die geometrischen Momente angeben:

$$2C = \sqrt{(M_R^{300} + M_R^{120} + M_R^{102})^2 + (M_R^{210} + M_R^{030} + M_R^{012})^2 + (M_R^{201} + M_R^{021} + M_R^{003})^2}$$

$$\mu = -\left[\left(M_R^{210} + M_R^{030} + M_R^{012}\right) + j\left(M_R^{300} + M_R^{120} + M_R^{102}\right)\right] \Big/ 2C$$

$$\lambda = \left(M_R^{201} + M_R^{021} + M_R^{003}\right) \Big/ 2C.$$

Wir bemerken, daß wir zur Bestimmung von $a$, $b$ und $\varepsilon$ (Gruppenparameter) bereits über die Gleichungen

$$\begin{aligned} (a^*)^2 - (b^*)^2 &= \mu \\ -\varepsilon(ab^* + a^*b) &= \lambda \\ aa^* + bb^* &= 1 \end{aligned}$$

verfügen. Zur eindeutigen Bestimmung brauchen wir jedoch weitere Gleichungen, die sich aus Normierungsbedingungen im Unterraum $M_{33}$ ergeben werden.
Mit den eingeführten Abkürzungen lauten die $\zeta$-Kodierungen im Unterraum $M_{31}$:

$$\begin{aligned} \left(\hat{F}_R\right)_{31}(\zeta) &= C\left(\mu\zeta + 2\lambda - \mu^*\zeta^{-1}\right) \\ \hat{F}_{31}(\zeta) &= C\left(\zeta - \zeta^{-1}\right). \end{aligned}$$

## 5.2 Zwischenvariablen

In diesem Abschnitt wiederholen wir die in [1] angegebenen Berechnungsvorschriften für Zwischenvariablen und geben ihre $\zeta$-Kodierungen an. Darüber hinaus stellen wir jeweils über (23) die Verbindung zu den $\zeta$-kodierten Kugelmomenten des Normobjektes her. Wir definieren zunächst die Variablen

$$(G_{\mathrm{R}})_{nl}^{m} := (-\lambda)^{-m} \sum_{\nu} \begin{pmatrix} l+\nu \\ \nu-m \end{pmatrix} \left(-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\nu} \left(\hat{F}_{\mathrm{R}}\right)_{nl}^{\nu}.$$

Nach kurzer Rechnung ergibt sich deren $\zeta$-Kodierung zu

$$(G_{\mathrm{R}})_{nl}(\zeta) = \sum_{m} (G_{\mathrm{R}})_{nl}^{m} \zeta^{m} = \left(\frac{\zeta-\lambda}{\zeta}\right)^{l} \cdot \left(\hat{F}_{\mathrm{R}}\right)_{nl} \left(\frac{\zeta-\lambda}{\mu}\right) \tag{26}$$

und unter Verwendung von (23) erhält man daraus

$$(G_{\mathrm{R}})_{nl}(\zeta) = \left[\frac{(a^*\varepsilon\zeta+b^*)(b^*\varepsilon\zeta+a^*)}{\mu\zeta}\right]^{l} \cdot \hat{F}_{nl}\left(\frac{a^*\varepsilon\zeta+b^*}{b^*\varepsilon\zeta+a^*}\right). \tag{27}$$

Hierbei haben wir Gebrauch von den leicht nachprüfbaren Identitäten

$$a^*\varepsilon\lambda + b\mu = -b^*$$

und

$$b^*\varepsilon\lambda - a\mu = -a^*$$

gemacht. Als nächstes hatten wir in [1] hergeleitet

$$(H_{\mathrm{R}})_{nl}^{m} := 4^{-l} \sum_{\nu} \tau_l^{m\nu} (G_{\mathrm{R}})_{nl}^{\nu}$$

mit

$$\tau_l^{m\mu} := (-1)^{\mu} \sum_{k} (-1)^{k} \begin{pmatrix} l-\mu \\ k-\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l+\mu \\ k+m \end{pmatrix}.$$

Wir rechnen wieder leicht nach, daß diese beiden Berechnungsvorschriften zusammen, gleichbedeutend sind mit

$$(H_{\mathrm{R}})_{nl}(\zeta) = \left(\frac{\zeta^2-1}{4\zeta}\right)^{l} \cdot (G_{\mathrm{R}})_{nl}\left(\frac{\zeta+1}{\zeta-1}\right). \tag{28}$$

Wir bestätigen erneut die Leistungsfähigkeit des Konzeptes der $\zeta$-Kodierung und stellen über (27) fest:

$$(H_{\mathrm{R}})_{nl}(\zeta) = \left(\frac{\zeta^2-s^2}{4\varepsilon s\zeta}\right)^{l} \cdot \hat{F}_{nl}\left(\varepsilon\frac{\zeta+s}{\zeta-s}\right). \tag{29}$$

Der Parameter $s$, der hier auftaucht, setzt sich wie folgt zusammen:

$$s := \frac{a^*\varepsilon - b^*}{a^*\varepsilon + b^*}.$$

Wir bemerken, daß die Variablen $H_{\mathrm{R}}$ im wesentlichen nur noch zwei Gruppenparameter enthalten, nämlich $s$ und $\varepsilon$. Über $s$ stellen wir weiter fest:

$$ss^* = \frac{1+\lambda}{1-\lambda} = \frac{\mu\mu^*}{(1-\lambda)^2},$$

und da $1 - \lambda = |a\varepsilon + b|^2 \geq 0$, folgern wir

$$|s| = \frac{|\mu|}{1-\lambda} \quad \text{, also bekannt!} \tag{30}$$

Nebst $\varepsilon$, muß also nur noch die Phase von $s$, oder $\mathrm{sgn}(s)$ über eine Normierung bestimmt werden. Es ist interessant zu beobachten, daß das weitere Vorgehen direkt aus den $\zeta$-kodierten Größen hergeleitet werden kann. Dazu setzen wir für R in (29) die Identität ein und erhalten

$$H_{nl}(\zeta) = \left(\frac{\zeta^2-1}{4\zeta}\right)^l \cdot \hat{F}_{nl}\left(\frac{\zeta+1}{\zeta-1}\right).$$

Die Umkehrung dieser Beziehung erhält man über die Substitution $\zeta \to \frac{\zeta+1}{\zeta-1}$:

$$\hat{F}_{nl}(\zeta) = \left(\frac{\zeta^2-1}{\zeta}\right)^l \cdot H_{nl}\left(\frac{\zeta+1}{\zeta-1}\right).$$

Dies erneut in (29) eingesetzt, ergibt

$$\left(H_{\mathrm{R}}\right)_{nl}(\zeta) = H_{nl}\left(\frac{(\varepsilon+1)\zeta + (\varepsilon-1)s}{(\varepsilon-1)\zeta + (\varepsilon+1)s}\right) \tag{31}$$

Wir diskutieren die zwei Fälle getrennt:

$$\varepsilon = 1 \Rightarrow \left(H_{\mathrm{R}}\right)_{nl}(\zeta) = H_{nl}(\zeta/s), \text{ oder } \left(H_{\mathrm{R}}\right)_{nl}^m = H_{nl}^m/s^m.$$

$$\varepsilon = -1 \Rightarrow \left(H_{\mathrm{R}}\right)_{nl}(\zeta) = H_{nl}(s/\zeta), \text{ oder } \left(H_{\mathrm{R}}\right)_{nl}^m = H_{nl}^{-m}/s^m = (-1)^m \left(H_{nl}^m\right)^*/s^m.$$

Nun treffen wir die *Normierung*

$$\mathrm{sgn}\left(H_{33}^{-1}\right) = 1 \text{ ; oder } \Re\{H_{33}^{-1}\} > 0 \text{ und } \Im\{H_{33}^{-1}\} = 0.$$

Das bedeutet für die beiden Fälle

$$\varepsilon = 1 \Rightarrow \left(H_{\mathrm{R}}\right)_{33}^{-1} = H_{33}^{-1} \cdot s \text{ , oder } \mathrm{sgn}\left(\left(H_{\mathrm{R}}\right)_{33}^{-1}\right) = \mathrm{sgn}(s)$$

$$\varepsilon = -1 \Rightarrow \left(H_{\mathrm{R}}\right)_{33}^{-1} = -\left(H_{33}^{-1}\right)^* \cdot s \text{ , oder } \mathrm{sgn}\left(\left(H_{\mathrm{R}}\right)_{33}^{-1}\right) = -\,\mathrm{sgn}(s).$$

Insgesamt gilt also

$$\operatorname{sgn}\left((H_{\mathrm{R}})_{33}^{-1}\right) = \varepsilon \operatorname{sgn}(s).$$

Wir führen wieder eine Abkürzung

$$\varepsilon \operatorname{sgn}(s) = \operatorname{sgn}\left((H_{\mathrm{R}})_{33}^{-1}\right) =: \nu$$

ein, und bemerken

$$\nu|s| = \varepsilon \operatorname{sgn}(s)|s| = \varepsilon s \quad , \tag{32}$$

so daß die neuen Zwischenvariablen

$$(I_{\mathrm{R}})_{nl}^{m} := (H_{\mathrm{R}})_{nl}^{m} \cdot (\nu|s|)^{m}$$

ergeben:

$$(I_{\mathrm{R}})_{nl}(\zeta) = (H_{\mathrm{R}})_{nl}(\varepsilon s \zeta).$$

Über (29) führen wir diese Abhängigkeit wieder auf $\hat{F}$ zurück. Ergebnis:

$$(I_{\mathrm{R}})_{nl}(\zeta) = \left(\frac{\zeta^2-1}{4\zeta}\right)^{l} \cdot \hat{F}_{nl}\left(\varepsilon\frac{\zeta+\varepsilon}{\zeta-\varepsilon}\right).$$

Der einzig verbliebene Gruppenparameter ist jetzt also $\varepsilon$. Ähnlich, wie in (31), rechnen wir auch hier nach

$$(I_{\mathrm{R}})_{nl}(\zeta) = I_{nl}\left(\frac{(\varepsilon+1)\zeta-(\varepsilon-1)}{(\varepsilon-1)\zeta+(\varepsilon+1)}\right),$$

und betrachten wieder die zwei Fälle getrennt:

$$\varepsilon = 1 \Rightarrow (I_{\mathrm{R}})_{nl}(\zeta) = I_{nl}(\zeta) \Rightarrow (I_{\mathrm{R}})_{nl}^{m} = I_{nl}^{m}$$

$$\varepsilon = -1 \Rightarrow (I_{\mathrm{R}})_{nl}(\zeta) = I_{nl}(-\zeta^{-1}) \Rightarrow (I_{\mathrm{R}})_{nl}^{m} = (-1)^{m} I_{nl}^{-m} = (I_{nl}^{m})^{*}.$$

Ist keine Invarianz bezüglich Spiegelungen erwünscht, so können wir als Invarianten direkt die Größen $(I_{\mathrm{R}})_{nl}^{m}$ verwenden. Dann sind alle Imaginärteile bezüglich Spiegelungen diskriminant. Andernfalls gelangen wir mit einer letzten *Normierung*

$$\Im\{I_{33}^{2}\} > 0$$

aufgrund obiger Analyse zu einer Bestimmung von $\varepsilon$:

$$\varepsilon = \operatorname{sgn}\left(\Im\{(I_{\mathrm{R}})_{33}^{2}\}\right).$$

# 6 Lageberechnung und Invarianten

Mit nunmehr bekanntem $\varepsilon$ und wegen (32) auch bekanntem $s$, lassen sich die Kugelmomente des Normobjektes angeben. Dazu betrachte man einerseits die Gleichungen (28) und (26). Unter Berücksichtigung von (30) ergeben sie

$$(H_{\mathrm{R}})_{nl}(\zeta) = \left[\frac{|\mu|}{|s|}\frac{(\zeta-1)(\zeta+ss^*)}{4\zeta}\right]^l \cdot \left(\hat{F}_{\mathrm{R}}\right)_{nl}\left(\frac{|\mu|}{\mu|s|}\cdot\frac{\zeta+ss^*}{\zeta-1}\right).$$

Andererseits gibt uns (29) $(H_{\mathrm{R}})_{nl}(\zeta)$ in Abhängigkeit von den Kugelmomenten $\hat{F}$ des Normobjektes an. Beides zusammen liefert

$$\left(\frac{\zeta^2-s^2}{4\varepsilon s\zeta}\right)^l \cdot \hat{F}_{nl}\left(\varepsilon\frac{\zeta+s}{\zeta-s}\right) = \left[\frac{|\mu|}{|s|}\frac{(\zeta-1)(\zeta+ss^*)}{4\zeta}\right]^l \cdot \left(\hat{F}_{\mathrm{R}}\right)_{nl}\left(\frac{|\mu|}{\mu|s|}\frac{\zeta+ss^*}{\zeta-1}\right).$$

Nun ist es einfach durch die Substitution $\zeta \to \frac{\zeta+\varepsilon}{\zeta-\varepsilon}s$ nach $\hat{F}_{nl}(\zeta)$ aufzulösen:

$$\hat{F}_{nl}(\zeta) = \left(\frac{|\mu|}{|s|}\frac{[(1+s^*)\zeta+\varepsilon(1-s^*)][-(1-s)\zeta+\varepsilon(1+s)]}{4\zeta}\right)^l \cdot \left(\hat{F}_{\mathrm{R}}\right)_{nl}\left(\frac{s}{|s|}\frac{|\mu|}{\mu}\frac{(1+s^*)\zeta+\varepsilon(1-s^*)}{-(1-s)\zeta+\varepsilon(1+s)]}\right)$$

Jetzt können wir die Parameter $a$ und $b$ der Drehmatrix $\boldsymbol{P}$ über einen einfachen Koeffizientenvergleich obiger Gleichung mit (24) berechnen. Ohne redundante Gleichungen anzuführen, erhalten wir folgendes algebraisches Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} ab^* &= \varepsilon\frac{|\mu|}{4|s|}(1-s)(1+s^*) \\ a/b &= \varepsilon\frac{1+s^*}{1-s^*} \\ a/a^* &= \frac{s|\mu|}{|s|\mu}\cdot\frac{1+s^*}{1+s}. \end{aligned}$$

Wir lösen nach $a$ und $b$ auf und finden:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\mu^*/s^*}\begin{pmatrix} 1+s^* \\ \varepsilon(1-s^*) \end{pmatrix}.$$

Beide Lösungen ergeben die *gleiche* Drehmatrix $\boldsymbol{P}$. Es handelt sich also hier um *keine* Zweideutigkeit.

Rekapitulierend, fassen wir die Berechnung der Parameter $a$, $b$ und $\varepsilon$ der Drehspiegelung $\boldsymbol{R}$ zusammen:

$$C = \sqrt{\left|\left(\hat{F}_{\mathrm{R}}\right)_{31}^{1}\right|^2 + \left[\frac{1}{2}\left(\hat{F}_{\mathrm{R}}\right)_{31}^{0}\right]^2}$$

$$
\begin{aligned}
\mu &= \left(\hat{F}_{\mathrm{R}}\right)^{1}_{31} \Big/ C \\
\lambda &= \frac{1}{2}\left(\hat{F}_{\mathrm{R}}\right)^{0}_{31} \Big/ C \\
\nu &= \operatorname{sgn}\left((H_{\mathrm{R}})^{-1}_{33}\right) \\
\varepsilon &= \operatorname{sgn}\left(\Im\left\{(I_{\mathrm{R}})^{2}_{33}\right\}\right) \\
s &= \varepsilon\nu\frac{|\mu|}{1-\lambda} \\
a &= \pm\frac{1}{2}\sqrt{\mu^*/s^*}(1+s^*) \\
b &= \pm\frac{1}{2}\sqrt{\mu^*/s^*}\varepsilon(1-s^*).
\end{aligned}
$$

Wir weisen noch einmal darauf hin, daß die Berechnung aller Größen über (6) auf die geometrischen Momente zurückgeführt werden kann. Für $C$, $\mu$ und $\lambda$ ist dies bereits auf S. 13 geschehen. Das gleiche gilt auch für alle aufgestellten Normierungsbedingungen und Zwischenvariablen.

Bei bekannten Gruppenparametern lassen sich nun die Invarianten selbst am besten direkt über Gl. (24) angeben. Wenn wir die Koeffizienten von gleichen Potenzen von $\zeta$ auf beiden Seiten vergleichen, erhalten wir:

$$
\hat{F}^m_{nl} = (\varepsilon a a^*)^l \left(\frac{a}{b}\right)^m \sum_{\mu=-l}^{l} \left(\hat{F}_{\mathrm{R}}\right)^{\mu}_{nl} \left(-\varepsilon\frac{a}{b^*}\right)^{\mu} \sum_k \binom{l-\mu}{k-\mu} \binom{l+\mu}{k-m} \left(-\frac{bb^*}{aa^*}\right)^k .
$$

Über die Grenzen von $k$ stellen wir hier fest: $\max(m,\mu) \le k \le l + \min(0, m+\mu)$.
Außer $(H_{\mathrm{R}})^{-1}_{33}$ und $(I_{\mathrm{R}})^{2}_{33}$, brauchen die Zwischenvariablen nicht berechnet zu werden.

# Literatur


[1] N. Canterakis, H. Schulz-Mirbach, " Algorithms for the construction of invariant features" Interner Bericht 2/94, Technische Informatik I, Technische Universität Hamburg-Harburg, April 1994. [1]

[2] H. Dirilten, and T. G. Newman, "Pattern matching under affine transformations" *IEEE Trans. on Computers*, vol. C-26, pp. 314-317, March 1977.

[3] H. Dym, H.P. McKean *Fourier Series and Integrals* Academic Press, 1972.

[4] T. L. Faber, and E. M. Stokely, "Affine transform determination for 3-D objects: A medical application" in *Proc. of the IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition*, pp. 440-445, 1986.

[5] M. Hatamian, " A Real-Time Two-Dimensional Moment Generating Algorithm and its Single Chip Implementation" *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. ASSP-34, pp.546-553, June 1986.

[6] K. Kanatani *Group Theoretical Methods in Image Understanding.* Springer, 1990.

[7] R. Lenz *Group Theoretical Methods in Image Processing.* Lecture Notes in Computer Science, Springer, 1990.

[8] C.-H. Lo, and H.-S. Don, "3D Moment forms: Their construction and application to object identification and positioning" *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Ma chine Intelligence*, vol. 11, no. 10, pp. 1053-1064, October 1989.

[9] L. V. Ovsiannikov *Group Analysis of Differential Equations.* Academic Press, 1982.

[10] Z. Pinjo, D. Cyganski and J.A. Orr, "Determination of 3-D object orientation from projections" *Pattern Recognition Letters*, no. 2, pp. 351-356, September 1985.

[11] F. A. Sadjadi, and E. L. Hall, "Three-dimensional moment invariants" *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. PAMI-2, no. 2, pp. 127-136, March 1980.

[12] E. Stiefel, A. Fässler *Gruppentheoretische Methoden und ihre Anwendung.* Teubner Studienbücher Mathematik, 1979.

[13] N.Ja. Vilenkin and A.U. Klimyk *Representation of Lie Groups and Special Functions* Volume 1, Kluwer Academic Publishers, 1993.


[1] Präsentiert im ESPRIT Basic Research Workshop on Visual Invariances, Stockholm, Mai 1994.