ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG
INSTITUT FÜR INFORMATIK
Lehrstuhl für Mustererkennung und Bildverarbeitung
Prof. Dr.-Ing. Hans Burkhardt

Georges-Köhler-Allee
Geb. 052, Zi 01-029
D-79110 Freiburg
Tel. 0761 - 203 - 8260

Übungen zur Vorlesung
Grundlagen der Bilderzeugung und Bildanalyse (Mustererkennung)
WS 05/06

Aufgabenblatt 7 (10 Punkte)

Vorlesungsstoff: bis ME-I, Kap. 5b

Abgabe am Mittwoch 21.12.2005 vor der Vorlesung

Bitte Name und Gruppe auf den Lösungen angeben.

Aufgabe 7.1: Differentielle Methode (4 Punkte)

Für Muster $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in I\!R^n$ und Gruppenelementen $g(a)$ mit einem Parameter a lautet eine hinreichende Bedingung für die Invarianz einer Funktion $I(x_1, \ldots, x_n)$, daß für alle a und $\mathbf{x}$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial a} I(g(a)\mathbf{x}) = 0. \tag{1}$$

a) Interpretieren Sie diese Bedingung anschaulich. Tip: betrachten Sie $I(g(a)\mathbf{x})$ als reine Funktion von a ($\mathbf{x}$ sei fest).

b) Es sei $h(a, \mathbf{x}) = (h_1(a, \mathbf{x}), \ldots, h_n(a, \mathbf{x})) := g(a)\mathbf{x}$ eine differenzierbare Funktion. Schreiben Sie (1) mittels der Kettenregel derart um, daß Sie eine Bedingung für die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_1} I$ und $\frac{\partial}{\partial x_2} I$ erhalten. Wie kann man $\frac{\partial}{\partial a} h(a, \mathbf{x})$ anschaulich interpretieren? Was bedeutet hiermit die soeben erhaltene Bedingung?

Aufgabe 7.2: Schwachkommutative Abbildungen (6 Punkte)

Wir betrachten Muster $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und die zyklische Translation τ.

a) Gegeben sind die folgenden Abbildungen:

$$(\omega_1 \mathbf{x})_i := (\mathbf{x})_{2i}$$
$$(\omega_2 \mathbf{x})_i := (\mathbf{x})_{i(1+i)} + (\mathbf{x})_{1+i}$$
$$(\omega_3 \mathbf{x})_i := ((\mathbf{x})_{i+1} - (\mathbf{x})_{i-1})^2 (\mathbf{x})_i$$

Alle Indizes sind hier modulo n zu verstehen. Welche dieser Abbildungen ist schwachkommutativ? (Achtung: Die Aussagen hängen teilweise von n ab) Geben Sie entsprechend die Translation τ' zu τ an, welche die Gleichung $\tau' \omega_k \mathbf{x} = \omega_k \tau \mathbf{x}$ erfüllt.

b) Gegeben sei eine invariante Abbildung $I(\mathbf{x})$ bzgl. zykl. Translation. Allerdings ist I auch invariant gegen Spiegelung $(\sigma \mathbf{x})_i = (\mathbf{x})_{-i}$. Geben Sie eine schwachkommutative Abbildung ω (bzgl. zykl. Translation) an, so daß $I(\omega(\mathbf{x}))$ nicht mehr invariant gegen Spiegelungen ist.