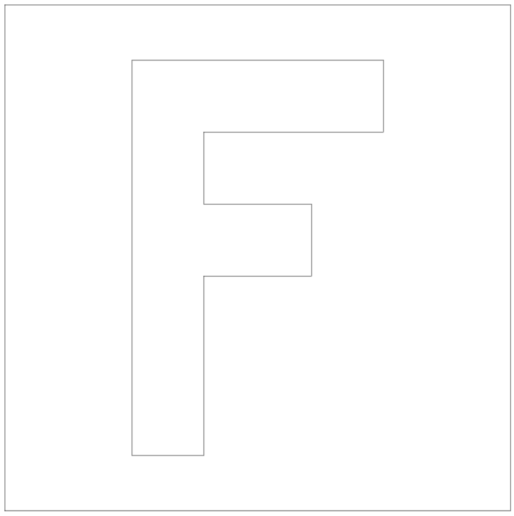
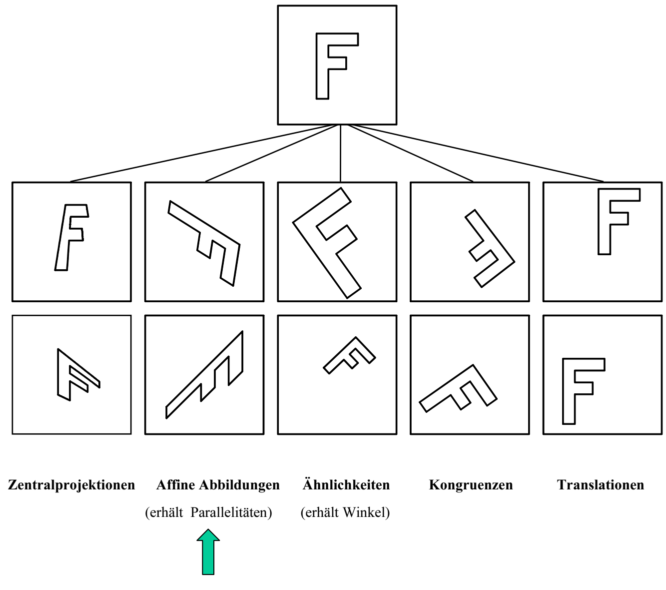
Affininvariante Fourierdeskriptoren

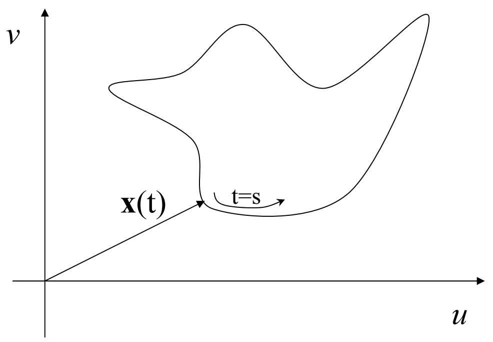
Gesucht: eine Verallgemeinerung der zuvor eingeführten ähnlichkeits-invarianten Fourierdeskriptoren



Geometrische Transformationen



Reelle, vektorielle, parametrische Beschreibung einer geschlossenen Kontur



$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$$

Mögliche Parametrisierung:
t=s (Bogenlänge)

Affine Abbildung einer Kontur

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}^0(t(t^0)) + \mathbf{b}}$$

mit: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ $\det(\mathbf{A}) \neq 0$

Zusätzlich Aufpunktverschiebung:

$$t(t^0, \tau)$$

Falls Bogenlänge als Paramterisierung verwendet wird: $t(t^0, \tau) = t(t^0 + \tau)$

Damit ergeben sich insgesamt 7 Freiheitsgrade für die affine Abbildung!

Äquivalente Strukturen

- In der Äquivalenzklasse *ähnlicher* Abbildungen mit der Äquivalenzrelation ~ gilt:

  Kreis1 ~ Kreis2
  Kreis ≁ Ellipse
  Parallelogramm ≁ Rechteck ≁ Quadrat

- In der Äquivalenzklasse *affiner* Abbildungen hingegen gilt:

  Kreis ~ Ellipse
  Parallelogramm ~ Rechteck ~ Quadrat

  aber: Kreis ≁ Quadrat

Entwicklung der Kontur als periodische Funktion in eine Fourierreihe

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \mathbf{X}_k e^{j2\pi kt/T}$$

mit dem komplexwertigen Fourierkoeffizientenvektor:

$$\mathbf{X}_k = \begin{bmatrix} U_k \\ V_k \end{bmatrix} = \tfrac{1}{T} \int_{t=0}^{T} \mathbf{x}(t) e^{-j2\pi kt/T} dt$$

Wahl einer Parametrisierung, welche linear (homogen) in der affinen Abbildung **A** ist

$$t(t^0, \mathbf{A}) = \mu(\mathbf{A}) \cdot t^0$$

Diese Forderung wird von der Bogenlänge nicht erfüllt!