ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG
INSTITUT FÜR INFORMATIK
Lehrstuhl für Mustererkennung und Bildverarbeitung
Prof. Dr.-Ing. Hans Burkhardt

Georges-Köhler-Allee
Geb. 052, Zi 01-029
D-79110 Freiburg
Tel. 0761 - 203 - 8260

Übungen zur Vorlesung
Grundlagen der Bilderzeugung und Bildanalyse (Mustererkennung)
WS 03/04

Aufgabenblatt 12 (12 Punkte)

Vorlesungsstoff: bis ME-II, Kap. 9, S.38

Abgabe am Donnerstag, 22.01.2004, vor der Übung

Bitte Name und Matrikelnummer auf den Lösungen angeben.

Aufgabe 12.1: Polynomiale Regression(4 Punkte)

Man realisiere die logische Funktion vom 2.-ten Teil der Aufgabe 10.1 durch polynomiale Regression 2.-ten Grades. Rein quadratische Terme (d.h. x^2, y^2 und z^2) sollen dabei weggelassen werden.

Wie sieht das Ergebnis aus, wenn die Punkte 001 und 011 ihre Funktionswerte bzw. Klassen austauschen? Was gewinnt man in diesem Fall durch die Hinzunahme eines Termes dritter Ordnung (z.B. xyz)?

Man gebe in jedem Fall auch eine Entscheidungsgrenze an.

Aufgabe 12.2: Polynomklassifikator(4 Punkte)

Gegeben sei die untenstehende Stichprobe von drei Klassen ω_1, ω_2 und ω_3 bestehend aus Punkten in $I\!R^2$.

1. Man berechne einen Polynomklassifikator unter Verwendung aller Glieder nullten, ersten, zweiten und dritten Grades.
2. Man zeige, dass alle Punkte der Stichprobe exakt klassifiziert werden.
3. Warum darf man statt der inversen Matrix $\mathbf{R}_{pp}^{-1}$ deren Pseudoinverse $\mathbf{R}_{pp}^{+}$ verwenden?

ω_1 : (0,1), (1,1), (1,0)
ω_2 : (0,2), (1,2), (1.5,0)
ω_3 : (0,0), (-1,0), (1,3)

Hinweis: Für aufwendige Matrizenmultiplikationen/-(Pseudo)Inversionen sollte ein Rechner verwendet werden.

Aufgabe 12.3: Programmieraufgabe: Polynomiale Regression (4 Punkte)

1. Im Folgenden ist eine Routine zur Berechnung der Koeffizientenmatrix für die polynomiale Regression aufgeführt. Die Funktion `pol_vec`, die zu gegebenem Polynomgrad p und Vektor $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ mit beliebigem n den lexikographisch geordneten Vektor
   $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = (1, x_1, x_2, \ldots, x_N, x_1^2, x_1x_2, \ldots, x_n^2, x_1^3, x_1^2x_2, \ldots x_n^3, \ldots x_n^p)^T$ erzeugt, soll als gegeben vorausgesetzt werden.

   Erklären Sie die Bedeutung jeder Zeile. (Insbesondere: Bedeutung und Dimension der Parameter und Variablen, Sinn der Operationen und Funktionen). Warum wird in Zeile 5 die Pseudoinverse verwendet?

   ```
   1 function A = regress_matrix(p,X,Y)
   2   PX = pol_vec(p,X);
   3   Cpy = (PX * Y')/size(PX,2);
   4   Cpp = (PX * PX')/size(PX,2);
   5   A = pinv(Cpp) * Cpy;
   6 endfunction;
   ```

2. Die Funktion $\sin(5x)$ soll im Intervall $[0, 1]$ durch polynomiale Regression approximiert werden. Es liegen 10 gleichverteilte Abtastwerte vor, die den exakten Funktionswerten an diesen Stellen entsprechen, lediglich der zweite Abtastwert sei additiv um 0.1 gestört. Geben Sie ein Skript an, das für die Polynomgrade $p = 1, \ldots, 20$ den mittleren quadratischen Fehler (MSE) der Approximation der Stützstellen bestimmt. Wann fällt dieser Fehler erstmals unter $\epsilon = 10^{-4}$? Wie entwickelt sich der MSE der Approximation der Originalfunkion? Benutzen Sie hierfür einen höher aufgelösten Testvektor.

   Stellen Sie zur Verdeutlichung der Ergebnisse die Näherungen der Funktion in einem Schaubild für die Polynomgrade $p = 1, 2, 5, 15, 20$ dar. Zeigen Sie ebenfalls die Stützstellen an.

   Sie können für Ihre Skripte alle in der Presto-Box enthaltenen Funktionen verwenden. Der Code ist wie immer ausführlich zu kommentieren.