

Übungen zur Vorlesung
Grundlagen der Bilderzeugung und Bildanalyse (Mustererkennung)
WS 03/04

Aufgabenblatt 9 (12 Punkte)

Vorlesungsstoff: bis ME-I, Kap. 7c, S.12

Abgabe am Donnerstag, 18.12.2003, vor der Übung

Bitte Name und Matrikelnummer auf den Lösungen angeben.

Aufgabe 9.1: Normalverteilungen / Bayes-Klassifikation (4 Punkte)

Gegeben seien 2-dimensionale Merkmalvektoren, welche aus drei normalverteilten Klassen stammen. Die Erwartungswerte und Kovarianzmatrizen der Klassen seien:

$$\boldsymbol{\mu}_1 = (0, 0)^T, \quad \mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\mu}_2 = (2, 0)^T, \quad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\mu}_3 = (2, 2)^T, \quad \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Man bestimme die Klassengrenzen des Bayes-Klassifikators und klassifiziere die Beobachtungen $\mathbf{x}_1 = (1, 0)^T$, $\mathbf{x}_2 = (1, 1)^T$ und $\mathbf{x}_3 = (1, 2)^T$, wenn alle Klassen gleiche a-priori Wahrscheinlichkeiten haben.

Wie ändert sich dieses Ergebnis, wenn die a-priori Wahrscheinlichkeiten der Klassen $P(\omega_1) = 3/4$ und $P(\omega_2) = 1/5$ sind?

Aufgabe 9.2: Rekursive Schätzung statistischer Kenngrößen(4 Punkte)

Gegeben seien folgende Stichproben von Beobachtungen:

$$\mathbf{x}_1 = (-2, 4)^T, \quad \mathbf{x}_2 = (-1, 1)^T, \quad \mathbf{x}_3 = (0, 0)^T, \quad \mathbf{x}_4 = (1, 1)^T, \quad \mathbf{x}_5 = (2, 4)^T$$

Man gebe die Schätzung der inversen Kovarianzmatrix nach der zweiten, dritten, vierten und fünften Stichprobe an und zwar sowohl für den stationären, als auch für den quasi-stationären Fall ($\alpha = 1/2$).

Aufgabe 9.3: Programmieraufgabe: Mahalanobis-Klassifikator (4 Punkte)

1. Implementieren Sie eine Funktion `[classes, cert] = mahalnobis_class(X, K, M)`, die Mahalanobis-Abstands-Klassifikation von Merkmalsvektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ realisiert. Eingabeparameter sind eine $n \times N$ Matrix \mathbf{X} , deren Spalten die N zu klassifizierenden Vektoren enthält, eine $n \times n$ Kovarianzmatrix \mathbf{K} und eine $n \times k$ Matrix \mathbf{M} , deren Spalten die k Klassenmittelwerte μ_i enthält. Ausgabeparameter sind ein Vektor `classes` $\in \mathbb{N}^N$ der geschätzten Klassenzugehörigkeiten, und ein Vektor `cert` $\in [0, 1]^N$, dessen Einträge ein Maß für die jeweilige Klassifikationssicherheit sein soll. Der Einfachheit halber soll für diese Klassifikationssicherheit heuristisch e^{-d^2} gewählt werden, wobei d der Mahalanobis-Abstand des zu klassifizierenden Vektors zu dem Mittelwert der gewählten Klasse ist.
2. Mit Hilfe des Presto-Box-Kommandos `visclass('gui', 'classifier', mahalnobis_class, K, M)` können die Klassifikationsgebiete dargestellt werden. Geben Sie die grafischen Resultate folgender Parameterkombinationen an und erläutern Sie die Gestalt und Lage der Entscheidungsgrenzen.
 - a) $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\mu_1 = (-1, -1)^T$, $\mu_2 = (1, -1)^T$, $\mu_3 = (1, 1)^T$, $\mu_4 = (-1, 1)^T$.
 - b) $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\mu_1 = (-1, -1)^T$, $\mu_2 = (1, -1)^T$, $\mu_3 = (1, 1)^T$, $\mu_4 = (-1, 1)^T$.

Der Code ist durch Kommentarzeilen ausführlich zu dokumentieren.