ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG
INSTITUT FÜR INFORMATIK
Lehrstuhl für Mustererkennung und Bildverarbeitung
Prof. Dr.-Ing. Hans Burkhardt

Georges-Köhler-Allee
Geb. 052, Zi 01-029
D-79110 Freiburg
Tel. 0761 - 203 - 8260

Übungen zur Vorlesung
Grundlagen der Bilderzeugung und Bildanalyse (Mustererkennung)
WS 03/04

Aufgabenblatt 7 (12 Punkte)

Vorlesungsstoff: bis ME-I, Kap. 5a, S.32

Abgabe am Donnerstag, 04.12.2003, vor der Übung

Bitte Name und Matrikelnummer auf den Lösungen angeben.

Aufgabe 7.1: Vollständige Integralinvarianten (4 Punkte)

Man betrachte die Menge aller 3-stelligen Zahlen zur Basis 3. Die zyklische Translation der Stellen definiere darauf eine Äquivalenzrelation.

1. Wieviele und welche Orbits gibt es?
2. Definieren Sie Invarianten, indem Sie möglichst einfache Monome über die Gruppe mitteln, bis Sie alle Orbits getrennt haben. Wieviele Invarianten haben Sie gebraucht?
3. Wie groß ist die obere Schranke, die der Noethersche Satz dafür voraussagt?

Aufgabe 7.2: Pólya-Theorie (3 Punkte)

In wieviele Orbits zerfallen Binärmuster der Dimension 7 und der Dimension 30 bei Äquivalenz unter zyklischen Translationen?

Aufgabe 7.3: Programmieraufgabe: Gruppenmittel und DFT (5 Punkte)

Für diese Teilaufgabe sind zunächst ein paar Vorüberlegungen erforderlich:

Für einen reellen Mustervektor $\mathbf{x} = (x(0), x(1), x(2))^T = (x_0, x_1, x_2)^T$ der Länge 3 bezeichne $\mathbf{X} = (X(0), X(1), X(2))^T$ seine DFT (Diskrete Fouriertransformation), die für die Länge 3 über

$$X(k) = \sum_{n=0}^{2} x(n)\omega^{kn}, \quad k = 0, 1, 2 \text{ mit } \omega^3 = 1$$

definiert ist. Hierbei ist ω eine komplexe dritte Einheitswurzel, welche auch die Gleichungen $1 + \omega + \omega^2 = 0$ sowie $\omega^* = \omega^2$ erfüllt. $*$ bezeichnet die komplexe Konjugation.

1. Zeigen Sie für $k = 0, 1, 2$, dass die Zahlen $I(k) := |X(k)|^2 = X(k) \cdot X(k)^*$ Translationsinvarianten darstellen, indem Sie jedes $I(k)$ als Gruppenmittel (Gruppe der zyklischen Verschiebungen) über ein möglichst einfaches Polynom in x_0, x_1 und x_2 ausdrücken!

2. Implementieren Sie in Scilab eine Funktion, die zu einem gegebenen Vektor $\mathbf{v} = (x_0, x_1, ..., x_{n-1})^T$ der Länge n und einem Monom $P(\mathbf{v}) = x_0^{d_0} x_1^{d_1} \dots x_{n-1}^{d_{n-1}}$ das Gruppenmittel über die endliche Gruppe der Translationen erzeugt. Das Monom soll als Vektor der Exponenten $d_0, d_1, ..., d_{n-1}$ angegeben werden.

3. Testen Sie Ihre Ergebnisse und Ihre Funktion, indem Sie eine Translationsinvariante zum Vektor $\mathbf{v} = (5, 8, 7)^T$ auf zwei verschiedene Arten berechnen und vergleichen:

   a) mit der DFT: $|X(k)|^2$

   b) mit Hilfe der in Teilaufgabe 7.3.1 gefundenen Polynome und der in Teilaufgabe 7.3.2 geschriebenen Funktion

   Hinweis: Die DFT kann in Scilab mit dem Befehl `dft` berechnet werden. Genaue Information zum Aufruf gibt die Hilfe.