ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG
INSTITUT FÜR INFORMATIK
Lehrstuhl für Mustererkennung und Bildverarbeitung
Prof. Dr.-Ing. Hans Burkhardt

Georges-Köhler-Allee
Geb. 052, Zi 01-029
D-79110 Freiburg
Tel. 0761 - 203 - 8260

Übungen zur Vorlesung
Grundlagen der Bilderzeugung und Bildanalyse (Mustererkennung)
WS 03/04

Aufgabenblatt 5 (12 Punkte)

Vorlesungsstoff: bis ME-I, Kap. 4c / S. 3

Abgabe am Donnerstag, 20.11.2003 vor der Übung

Bitte Name und Matrikelnummer auf den Lösungen angeben.

Aufgabe 5.1: Fourierkoeffizienten / -Deskriptoren (4 Punkte)

Man betrachte das Dreieck mit den Punkten $A = -3$, $B = 3$ und $C = 4j$, wobei $j^2 = -1$.

1. Mit A als Aufpunkt berechnen Sie die Fourierkoeffizienten des Dreiecks, indem Sie seine Kontur mit der Bogenlänge parametrisieren.
2. Wie ändern sich die Fourierkoeffizienten, wenn man als Aufpunkt den Punkt 0 wählt? Welche Art von Symmetrie lässt sich jetzt an den Koeffizienten ablesen?
3. Wie lauten die Fourierdeskriptoren des Dreiecks?

Aufgabe 5.2: Fourierdeskriptoren und Lageparameter (4 Punkte)

Wir betrachten das Einheitsquadrat Q in der komplexen Ebene bestehend aus den Punkten 0, 1, $1+i$ und j. Parametrisiert man dies mit $x(t)$ über die auf 2π normierte Bogenlänge, dann lauten die Fourierkoeffizienten:

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{2}(1+j), \\
c_n &= -\frac{4}{\pi^2 n^2}(1+j) \quad \text{für} \quad n = 1+4k, k \in \mathbb{Z} \\
c_n &= 0 \quad \text{sonst.}
\end{aligned}$$

1. Berechnen Sie hieraus die Fourierdeskriptoren $\tilde{x}_n, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ des Quadrats Q.
2. Diese Fourierdeskriptoren können als Fourierkoeffizienten einer normierten Konturlinie $x^0(t)$ aufgefasst werden, indem $c_0^0 := 0$ und $c_n^0 := \tilde{x}_n$ gesetzt wird. Diese Konturlinie $x^0(t)$ beschreibt ein im Moment noch unbekanntes Objekt Q^0. Aus den Fourierkoeffizienten c_n und den Fourierdeskriptoren $\tilde{x}_n$ kann man jedoch die Lageparameter R, ϕ, z und t_0 der Konturlinie $x(t)$ relativ zu (dem im Moment unbekannten) $x^0(t)$ ermitteln. Berechnen sie diese Lageparameter mit Hilfe der in der Vorlesung angegebenen Formeln.

3. Aus diesen Parametern kann nun rückwärts von Q anschaulich auf die Lage von Q^0 und $x^0(t)$ geschlossen werden. Geben Sie die Eckpunkte von Q^0 an. Für welche Parameter $t \in [0, 2\pi)$ werden diese durch $x^0(t)$ erfasst?

Aufgabe 5.3: Programmieraufgabe: Fouriersynthese, Rotationssymmetrie (4 Punkte)

Auf der Internetseite zur Vorlesung finden Sie die Datei `computeFc.sci`, welche die Fourierkoeffizienten eines Polygonzuges erzeugt. Der Funktionsaufruf ist durch folgende Syntax gegeben:

```
Fc = computeFc ( n, Polygon )
```

Hierbei ist `Polygon` ein p-Vektor, welcher die Koordinaten der p Eckpunkte des Polygonzuges in komplexer Schreibweise enthält, `2n+1` die Anzahl der zu berechnenden Fourierkoeffizienten und `Fc` der `2n+1`-Ergebnisvektor mit den Fourierkoeffizienten in der Reihenfolge $-c_n, \ldots, c_0, \ldots, c_n$.

1. Berechnen Sie mit Hilfe dieser Funktion für $n = 7, 13, 19, 31$ die Fourierkoeffizienten für das regelmäßige Sechseck, das durch die 6 sechsten komplexen Einheitswurzeln definiert ist (d.h. die Eckpunkte $e^{\frac{2\pi}{6}jk}$ für $k = 0, ..., 5$ besitzt).
2. Schreiben Sie eine Funktion zur Fouriersynthese, die als Eingabevektor komplexe Fourierkoeffizienten in der Folge $-c_n, \ldots, c_0, \ldots, c_n$ erwartet. Die Funktion soll einen komplexen Vektor X zurückgeben, der die Objekte approximiert. Verwenden Sie die in Teilaufgabe 1.) erzeugten Fourierkoeffizienten als Testdaten. Visualisieren Sie die Ergebnisse jeweils mit: `plot2d(real(X),imag(X))`.
3. Schreiben Sie eine Funktion, welche anhand der Fourierkoeffizienten einen Test auf Rotationssymmetrie des Polygonzuges durchführt und den Grad zurückgibt. Prüfen Sie die Funktion mit den berechneten Fourierkoeffizienten aus Teilaufgabe 1.)