ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG
INSTITUT FÜR INFORMATIK
Lehrstuhl für Mustererkennung und Bildverarbeitung
Prof. Dr.-Ing. Hans Burkhardt

Georges-Köhler-Allee
Geb. 052, Zi 01-029
D-79110 Freiburg
Tel. 0761 - 203 - 8260

Übungen zur Vorlesung
Grundlagen der Bilderzeugung und Bildanalyse (Mustererkennung)
WS 03/04

Aufgabenblatt 1 (12 Punkte)

Vorlesungsstoff: bis ME-I, Kap. 2a

Abgabe am Donnerstag, 23.10.2003 vor der Übung

Bitte Name und Matrikelnummer auf den Lösungen angeben.

Aufgabe 1.1: Äquivalenzrelation, Invarianz (4 Punkte)

Wir betrachten 3 Relationen (mit Relationssymbol $\sim$) auf der Menge der Punkte in der Euklidschen Ebene $\mathbf{x} = (x,y)^T \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie exemplarisch für (1), dass sie eine Äquivalenzrelation ist. Die übrigen Relationen sind ebenfalls Äquivalenzrelationen. Beschreiben Sie für alle Äquivalenzrelationen die geometrische Gestalt der Äquivalenzklassen. Finden Sie in allen Fällen eine Funktion $I(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die invariant auf den Äquivalenzklassen ist und sie separiert, d.h. pro Klasse unterschiedliche Werte annimmt.

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \mathbf{x} \sim \mathbf{x}' \iff & \mathbf{x}'^T\mathbf{x}' = \mathbf{x}^T\mathbf{x} \\
(2) & \mathbf{x} \sim \mathbf{x}' \iff & \exists a \in \mathbb{R} : \mathbf{x}' = \mathbf{x} + a \cdot (1,1)^T \\
(3) & \mathbf{x} \sim \mathbf{x}' \iff & \exists \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} : \mathbf{x}' = \lambda \cdot \mathbf{x}
\end{array}
$$

Aufgabe 1.2: Kongruenzabbildungen (4 Punkte)

Man betrachte die Gruppe der starren Bewegungen und Spiegelungen in der Euklidschen Ebene (Kongruenzabbildungen): $\mathbf{a} \to \mathbf{a}' = \mathbf{R}\mathbf{a} + \mathbf{t}$, wobei $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}'$ und $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^2$ und $\mathbf{R}$ eine orthogonale 2×2 Matrix ist, die also $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}_2$ erfüllt. $\mathbf{R}$ sieht also folgendermaßen aus:

$$
\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \text{ oder } \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix} .
$$

1. Wir definieren eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf Punkte**paaren**:
   $(\mathbf{a},\mathbf{b}) \sim (\mathbf{a}',\mathbf{b}') \iff \exists \mathbf{R}$ orthogonal und $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^2$ so, dass
   $\mathbf{a}' = \mathbf{R}\mathbf{a} + \mathbf{t}$ und $\mathbf{b}' = \mathbf{R}\mathbf{b} + \mathbf{t}$.
   Geben Sie eine Invariante $I : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ auf Punktepaaren an, die die Klassen separiert und erläutern Sie diese geometrisch!
2. Verallgemeinern Sie obige Aufgabe auf Punktetripel!
   Hinweis: Sie benötigen jetzt drei Invarianten.

Aufgabe 2: Programmieraufgabe: Euklidsche Bewegung (4 Punkte)

Die Matrix P stellt eine Menge an Punkten dar, die ein Polygon bildet (letzter Punkt wird mit dem ersten Punkt verbunden):

$$P = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & \cdots & y_n \end{bmatrix}$$

1. Implementieren Sie zwei Scilab Funktionen, die als Eingabeparameter Punkte in der oben dargestellten Form sowie geeignete Bewegungsparameter bekommen und deren Rückgabewert eine Matrix mit den neuen Koordinaten der Punkte ist.
   (a) eine Scilab Funktion, die die Translation aller in der Matrix übergebenen Punkte um x in x-Richtung und y in y-Richtung vornimmt.
   (b) eine Scilab Funktion, die die Rotation aller in der Matrix übergebenen Punkte mit dem Winkel ϕ um den Ursprung vornimmt.
2. Gegeben sei ein Polygon

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 0.4 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.8 & 0.5 \end{bmatrix}$$

   Geben Sie die resultierenden Punkte an, wenn Sie die Punkte in A
   (a) zunächst verschieben mit $x = 1$ und $y = 1$ und anschließend drehen um den Winkel $\pi/2$.
   (b) zunächst um den Winkel $\pi/2$ drehen und dann mit $x = 1$ und $y = 1$ verschieben.
3. Veranschaulichen Sie die Ergebnisse, indem Sie das Originalpolygon sowie die beiden transformierten Polygone in einer Grafik mit Scilab ausgeben.
4. Welche Beobachtung können Sie beim Blick auf den Plot anstellen? Geben Sie eine analytische Begründung dafür an.

Hinweise: Speichern Sie die Funktionen jeweils in eigene Dateien ab. Benutzen Sie die Hilfe, um Hinweise für das Plotten von Polygonen und das Formatieren von Grafiken zu bekommen. Vermeiden Sie nach Möglichkeit das Benutzen von Schleifen in Ihren Funktionen (for, while).