Invarianten für die Gruppe der zyklischen Translationen für Binärmuster der Dimension N=16

Man erhält 2^{16} = 65.536 unterschiedliche Binärmuster.

Mit Hilfe der Pólya-Theorie läßt sich zeigen, daß es genau die folgende Zahl von unterscheidbaren Orbits oder Äquivalenzklassen gibt:

$$A_B = \frac{1}{N} \sum_{k|N} \varphi(k) 2^{\frac{N}{k}} \Bigg|_{N=16} = 4116$$

Die Summe geht über alle Teiler k von N. φ ist die Eulersche φ-Funktion (Die Eulersche φ-Funktion φ(n) gibt die Anzahl aller natürlichen Zahlen k mit 1 ≤ k ≤ n, für die k teilerfremd zu n ist).

Trenneigenschaften polynomialer Merkmale

Es wurden folgende 9 Monome über die Gruppe gemittelt:

$$f_0 = x_0 \quad f_3 = x_0 x_3 \quad f_6 = x_0 x_6$$
$$f_1 = x_0 x_1 \quad f_4 = x_0 x_4 \quad f_7 = x_0 x_7$$
$$f_2 = x_0 x_2 \quad f_5 = x_0 x_5 \quad f_8 = x_0 x_8$$

Ergeben sich folgende Trenneigenschaften:

Merkmalmenge	sep. Muster	Δ
$\tilde{x}_0$	17	0,004
$\{\tilde{x}_0, \tilde{x}_1\}$	66	0,016
$\{\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2\}$	200	0,049
$\{\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3\}$	501	0,122
$\{\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_4\}$	980	0,238
$\{\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_5\}$	1516	0,368
$\{\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_6\}$	1818	0,442
$\{\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_7\}$	1876	0,456
$\{\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_8\}$	1876	0,456

Verbesserung der Trenneigenschaften polynomialer Merkmale

Mit den folgenden zwei Merkmalen:

$$\tilde{x}_0 = x_0 + \ldots + x_{15}$$

$$\tilde{x}_1 = (x_0 + x_1)^2 + (x_{15} + x_0)^2 + \ldots (x_1 + x_2)^2$$

Und der schwach kommutativen Abb.:

$$(\omega \mathbf{x})_i = x_i + (2x_{(i-1)\bmod 16} + x_{(i+1)\bmod 16})^2, \quad 0 \le i \le 15$$

Ergeben sich folgende Trenneigenschaften:

Merkmalmenge	sep. Muster	Δ
$\{\tilde{x}_0, \tilde{x}_1\}$	66	0,02
$\{\tilde{x}_0 \circ \omega^1, \tilde{x}_1 \circ \omega^1\}$	906	0,22
$\{\tilde{x}_0 \circ \omega^2, \tilde{x}_1 \circ \omega^2\}$	3630	0,88
$\{\tilde{x}_0 \circ \omega^3, \tilde{x}_1 \circ \omega^3\}$	4086	0,99
$\{\tilde{x}_0 \circ \omega^4, \tilde{x}_1 \circ \omega^4\}$	4116	1,00

Verbesserung der Trenneigenschaften für Transformationen aus der Klasse $\mathbb{C}T$

Transformationen	RT	(+,x)	BT	|*F*|
Separierbare Muster A_s	225	230	168	1876
$\Delta = A_s/A_B$	0,055	0,056	0,041	0,456

Transformationen	separierbare Muster	Δ
RT	225	0,05
RT $\circ\ \omega_1$	3682	0,89
RT $\circ\ \omega_1 \circ \omega_1$	4116	1,00
RT $\circ\ \omega_2$	4088	0,99
RT $\circ\ \omega_2 \circ \omega_2$	4116	1,00
RT $\circ\ \omega_3$	4116	1,00

Mit den folgenden schwach kommutativen Abbildungen:

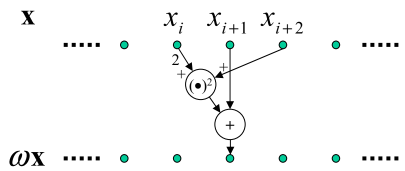
$$(\omega_1\mathbf{x})_i = x_i + \left(\sum_{i=0}^{15} x_i\right)\left(2x_{(i+1)\bmod 16} + x_{(i+2)\bmod 16}\right)^2$$

$$(\omega_2\mathbf{x})_i = x_i + \left(x_{(i+1)\bmod 16} + 2x_{(i+2)\bmod 16} + 3x_{(i+3)\bmod 16}\right)^2$$

$$(\omega_3\mathbf{x})_i = x_i + \left(x_{(i+1)\bmod 16} + 2x_{(i+2)\bmod 16} + 3x_{(i+3)\bmod 16} + 4x_{(i+4)\bmod 16}\right)^2$$

Diese Abbildungen sind weitgehend willkürlich gewählt!

Zum Beispiel:

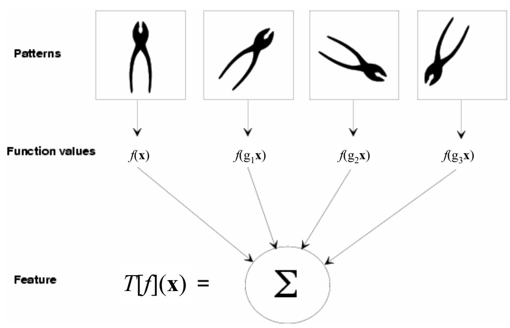


Ausserdem kann allgemein gezeigt werden, dass man bei der Gruppe der zyklischen Translationen der Länge N mit maximal N geeignet gewählten Merkmalen Vollständigkeit erzielen kann.

Invarianten durch Gruppenmittelung

Invarianten können unter Einsatz beliebiger Funktionen f durch Integration über die die Bewegungsgruppe gewonnen werden:

$$I[f](\mathbf{x}) = \int_G f(g\mathbf{x})\,dg$$



Integralinvarianten für die Gruppe der ebenen Bewegungen mit lokalen Funktionen

Für die zyklische ebene Bewegung gilt:

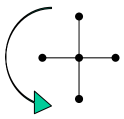
$$g(t_0, t_1, \varphi)\mathbf{x}[i, j] = \mathbf{x}[k, l]$$

mit: $$\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \end{pmatrix}$$

Alle Indizes müssen Modulo der Bilddimension verstanden werden!

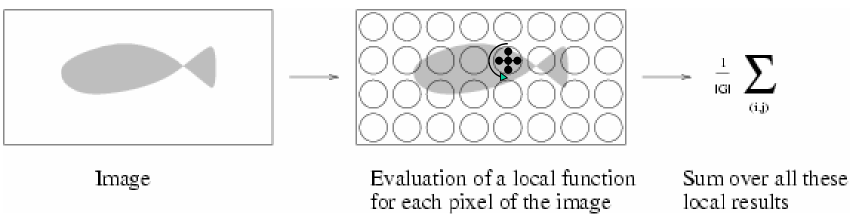
$$T[f](\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi NM} \int_{t_0=0}^{N} \int_{t_1=0}^{M} \int_{\varphi=0}^{2\pi} f(g\mathbf{x})\, d\varphi\, dt_1 dt_0$$

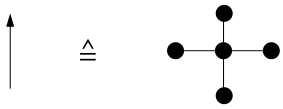
Es stellt sich nun heraus, dass f und g ***vertauschbar*** sind, d.h. man führt die die i.allg. lokale Funktion mit einer Euklidschen Bewegung über das ganze Bild. Näherung der Integration durch eine Summation auf dem Pixelraster und einer Rotation um eine endliche Anzahl von Winkeln, bei bilinearer Interpolation der Zwischenwerte.



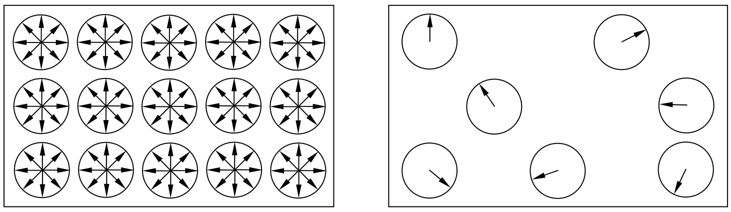
Berechnung des Monoms:

$$\begin{array}{c|c|c} & x_{1,0}^{3} & \\ \hline x_{0,-1}^{1} & x_{0,0}^{5} & x_{0,1}^{2} \\ \hline & x_{-1,0}^{2} & \end{array} = x_{0,-1}^{1} \cdot x_{1,0}^{3} \cdot x_{0,0}^{5} \cdot x_{-1,0}^{2} \cdot x_{0,1}^{2}$$





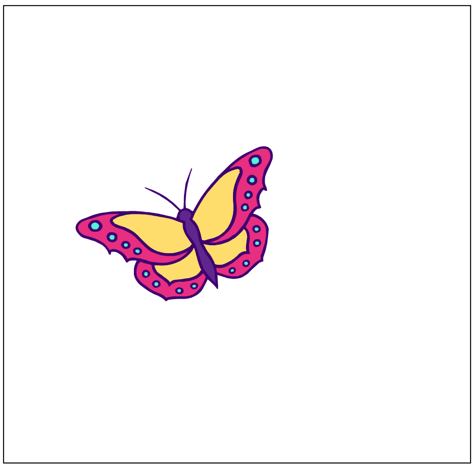
Monom

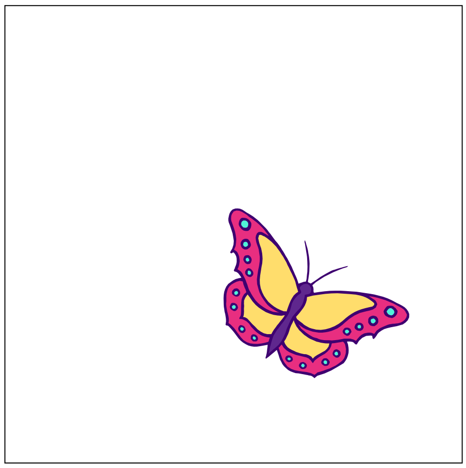


Deterministisches
Integral über Euklidsche
ebene Bewegung

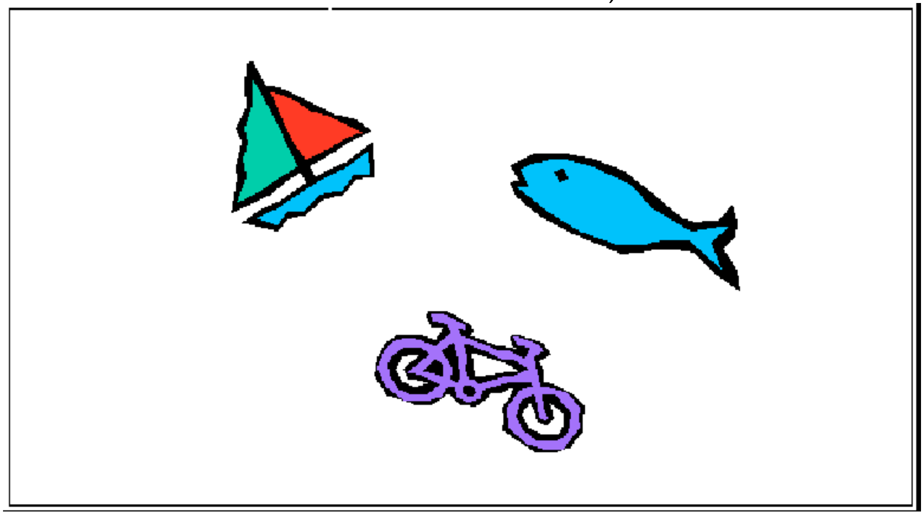
Monte-Carlo-Integration

Invarianz bezüglich einer globalen Euklidischen Bewegung (Translation and Rotation)



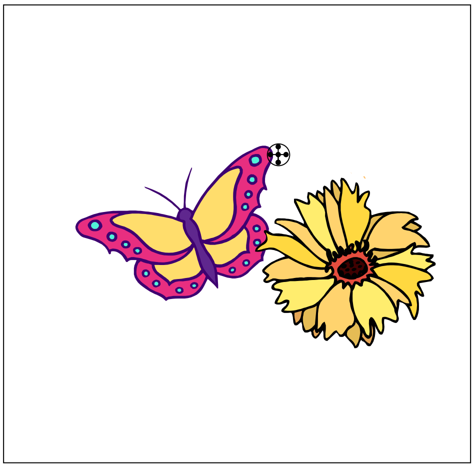


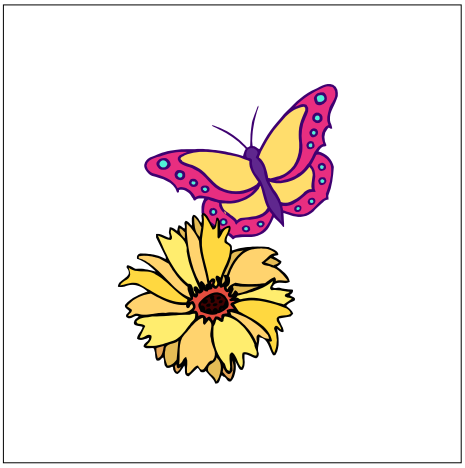
Äquivalenzklasse für Objekte mit unabhängiger Euklidscher Bewegung (Benutzung von Funktionen mit lokalem Definitionsbereich)



Erkennung von Objekten mit Gelenken

Erkennung zweier Objekte in einer Szene ohne zu segmentieren





Robustheit gegenüber topologischen Deformationen