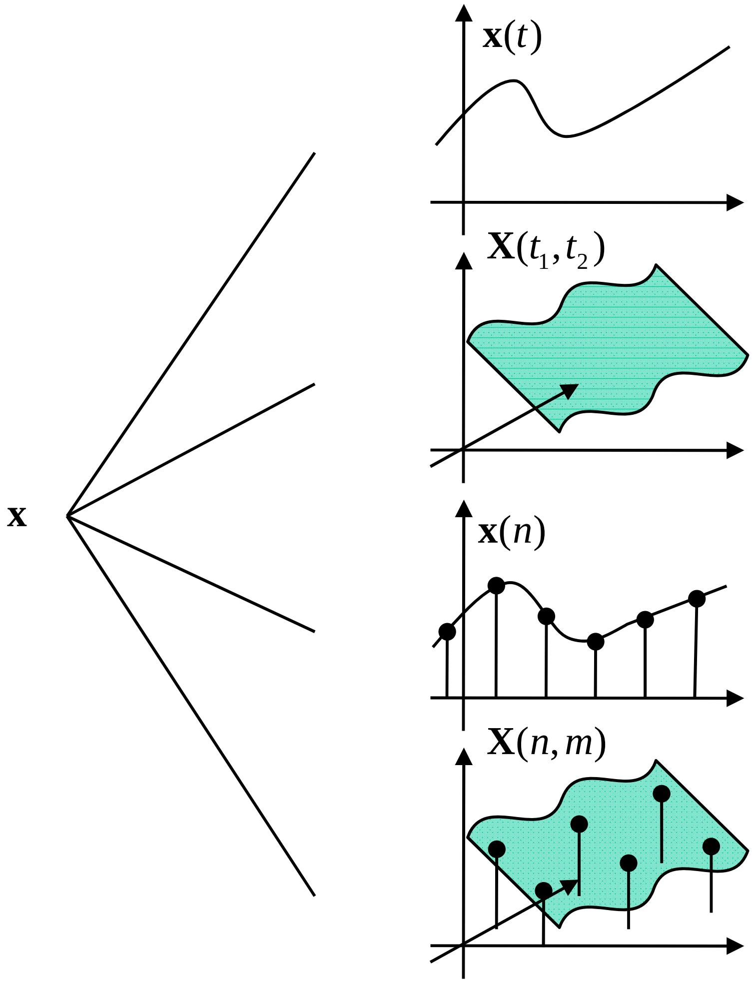
2. Darstellung von Signalen und Bildern in linearen Vektorräumen

Kontinuierliche oder diskrete Signale und Bilder lassen sich sehr einheitlich in ***linearen Vektorräumen*** darstellen.



$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \int \mathbf{x}(t)\mathbf{y}(t)dt$$ 1D, kontinuierlich

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \iint \mathbf{X}(t_1, t_2)\mathbf{Y}(t_1, t_2)dt_1 dt_2$$ 2D, kontinuierlich

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum x_i y_i$$ 1D, diskret

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \sum\sum X_{ij} Y_{ij}$$ 2D, diskret

Vorteile der Einbettung in Vektorräume

- Einheitliche Beschreibung von kontinuierlichen, diskreten, ein- und mehrdimensionalen Signalen mit Begriffen in Vektorräumen
- Einheitliche Beschreibung mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ anstatt mit $\iiint$ und mit $\sum\sum\sum$
- Ähnlichkeiten von Funktionenräumen $\{x_i(t)\}$ und Euklidschen Vektorräumen $\{\mathbf{x}_i\}$ und damit einfache geometrische Interpretation und Veranschaulichung (Zeit- oder Ortsfunktionen sind einfach Elemente eines geeignet gewählten Vektorraums)

Lineare Vektorräume

Lineare Vektorräume sind durch folgende Axiome erklärt:

I) Die Addition ist erklärt:

a) $\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathcal{X}$: $\quad \mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x} \quad \in \mathcal{X}$ (kommutativ)

b) $\forall \mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in \mathcal{X}$: $\quad \mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})=(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}$ (assoziativ)

c) $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}: \exists \mathbf{0} \in \mathcal{X}$: $\quad \mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x}$ (es existiert ein Nullelement)

d) $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}: \exists (-\mathbf{x}) \in \mathcal{X}$: $\quad \mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\mathbf{0}$ (negatives, zu "+" inverses Element)

II) Die Multiplikation mit einem Skalar α aus einem Zahlenkörper $\mathbb{K}$ ist erklärt:

a) $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{X} \ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{K}$: $\quad \alpha(\beta\mathbf{x})=(\alpha\beta)\mathbf{x}$ (assoziativ)

b) $\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathcal{X} \ \forall \alpha \in \mathbb{K}$: $\quad \alpha(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\alpha\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}$ (distributiv)

c) $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{X} \ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{K}$: $\quad (\alpha+\beta)\mathbf{x}=\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{x}$ (distributiv)

d) $\exists\ 1 \in \mathbb{K}$: $\quad 1\cdot\mathbf{x}=\mathbf{x}$ (Eins-Element)